Pr. Cabri 807

Enunciado

Dada una circunferencia de radio R y diámetro EF, consideremos A O B puntos de EF tal que EA=AO=OB=BF=1/2 R.

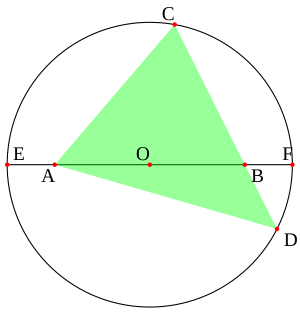
Sea ADC un triángulo genérico de lados a d c, con D y C sobre la circunferencia dada y tal que DC contenga a B.

Demostrar que $a^2 + d^2 + c^2$ es constante y calcular su valor.

Generalización del director a partir del Problema 1 Capítulo 4 de Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría.

Solución
por César Beade Franco

Demotraremos un resultado más general, imponiéndole a A y B la única condición de ser simétricos respecto a O.



Llamamos $t = \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}$ y tomamos O como origen de coordenadas y la recta EF como eje de abscisas.

Así A=(-Rt,0) y C y D son los puntos de corte de una recta que pasa por B=(Rt,0) con pendiente m con la circunferencia de centro O y radio R.

Resolviendo el sistema correspondiente obtenemos

$C=\left(\frac{m^2 R t-\sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))}}{1+m^2}, -\frac{m\left(R t+\sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))}\right)}{1+m^2}\right)$ y

$D=\left(\frac{m^2 R t+\sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))}}{1+m^2}, \frac{m\left(-R t+\sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))}\right)}{1+m^2}\right)$.

Siguiendo con los cálculos $a^2+d^2+c^2 = DC^2+CA^2+AD^2$

$4 R^2 \left(1-\frac{m^2 t^2}{1+m^2}\right) + \frac{R\left(2 t \sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))} +R (1+t^2+m^2 (1+3 t^2))\right)}{1+m^2} + \frac{R\left(-2 t \sqrt{R^2 (1-m^2 (-1+t^2))} +R (1+t^2+m^2 (1+3 t^2))\right)}{1+m^2} =$

$2 R^2 \left(3+t^2\right)$,

resultado que solo depende de R y de la posición del punto A, no de la posición de C y D.

En el caso del problema con $t=\frac{1}{2}$, $a^2+d^2+c^2 = \frac{13 R^2}{2}$.