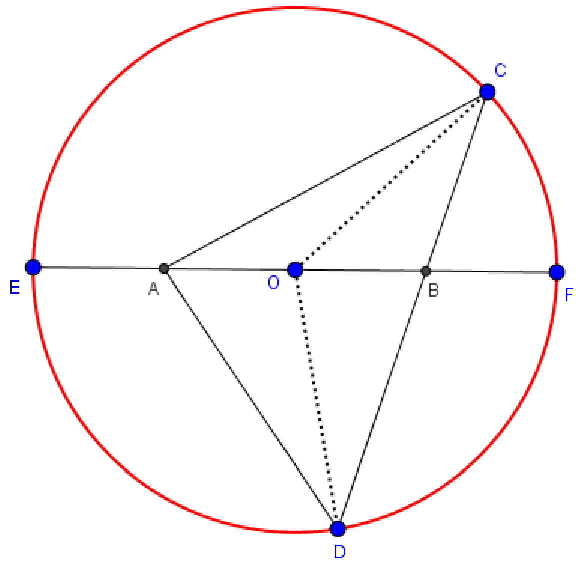
Problema 807.-
Dada una circunferencia de radio R y diámetro EF, consideremos A, O, B puntos de EF tal que
$EA = AO = OB = BF = 1/2\ R$.
Sea ADC un triángulo de lados a, d, c con $D\ y\ C$ sobre la circunferencia dada y tal que DC contenga a B.
Demostrar que $a^2 + d^2 + c^2 = k(cte.)$ es constante y calcular su valor.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dada la circunferencia de radio R y diámetro EF. Consideremos A, O, B puntos de EF tal que $EA = AO = OB = BF = 1/2\ R$. Sea finalmente, ADC un triángulo de lados a, d, c con $D\ y\ C$ sobre la circunferencia dada y tal que DC contenga a B.



Consideramos el triángulo ABC. Entonces se verifican las siguientes relaciones:

$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2 \cdot AO \cdot OC \cdot cos\measuredangle AOC$; $BC^2 = BO^2 + OC^2 + 2 \cdot BO \cdot OC \cdot cos\measuredangle AOC$

Sumando ambas expresiones, obtenemos que:

$AC^2 + BC^2 = AO^2 + OC^2 + BO^2 + OC^2$; $AC^2 + BC^2 = (\frac{1}{2}R)^2 + (\frac{1}{2}R)^2 + R^2 + R^2$

$AC^2 + BC^2 = d^2 + BC^2 = \frac{5}{2}R^2 \quad (I).$
Si consideramos ahora el triángulo ABD, también se verificará $AD^2 + BD^2 = c^2 + BD^2 = \frac{5}{2}R^2 \quad (II).$

Como quiera que se verifica $BC \cdot BD = EB \cdot BF \rightarrow\ BC \cdot BD = \frac{3}{2}R \cdot \frac{1}{2}R = \frac{3}{4}R^2.$

Por otra parte, $a = CD = BC + BD \rightarrow CD^2 = (BC + BD)^2 = BC^2 + BD^2 + 2 \cdot BC \cdot BD$

$a^2 = CD^2 = BC^2 + BD^2 + \frac{3}{2}R^2.$ Finalmente,

$$a^2 + d^2 + c^2 = CD^2 + AC^2 + AD^2 = \left(BC^2 + BD^2 + \frac{3}{2}R^2\right) + \left(\frac{5}{2}R^2 - BC^2\right) + \left(\frac{5}{2}R^2 - BD^2\right)$$

$$a^2 + d^2 + c^2 = \frac{13}{2}R^2 = k = (Cte.)$$

Problema 1.- *Una bisabuela muy geómetra.* Si $R = 4$, la bisabuela tiene entonces 104 $años$.