Problema 807

Dada una circunferencia de radio R y diámetro EF, consideremos A O B puntos de EF tal que EA=AO=OB=BF=1/2 R.

Sea ADC un triángulo genérico de lados a d c, con D y C sobre la circunferencia dada y tal que DC contenga a B.

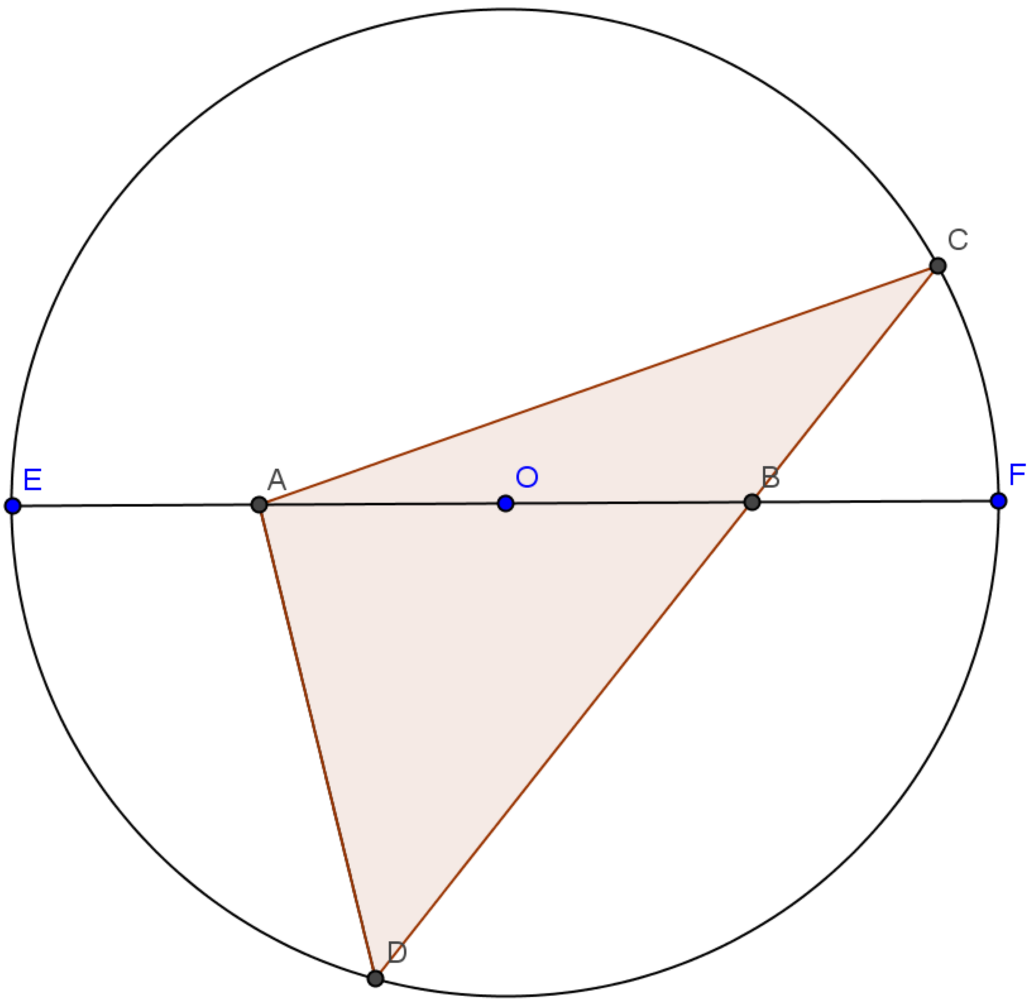
Demostrar que $a^2+d^2+c^2$ es constante y calcular su valor.

Generalización del director a partir del Problema 1 Capítulo 4 de

Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría

Capítulo 4 1.-Una bisabuela muy geómetra. A mi bisabuela le ha gustado siempre la geometría. Así que ayer dibujó un círculo de 4 cm de radio, con un diámetro EF dividido en cuatro partes iguales por los puntos A, O (centro del círculo) y B. Luego dibujó una cuerda CD que pasaba por B y formaba un ángulo de 43º con el diámetro EF. Entonces me comentó que su edad era igual a la suma de los cuadrados en cm2 de las longitudes de los lados del triángulo ACD, es decir... Tu turno:

Solución del director:



Consideremos el triángulo ABC que es tal que su lado AB de longitud R y su mediana OC tiene longitud R.

Utilizando la fórmula de la mediana, tenemos:

$$R^2 = \frac{2\,AC^2 + 2\,BC^2 - R^2}{4}$$

Igualmente en relación al triángulo ABD,

$$R^2 = \frac{2\,AD^2 + 2\,DB^2 - R^2}{4}$$

Así tenemos,

$5\,R^2 = 2\,AC^2 + 2\,BC^2$ y $5\,R^2 = 2\,AD^2 + 2\,DB^2$

O sea, $10\,R^2 = 2\,AC^2 + 2\,BC^2 + 2\,AD^2 + 2\,DB^2$

Por otra parta, considerando la potencia de B en la circunferencia dada, es:

BC BD = BE BF= $\left(\frac{3}{2}R\right)\left(\frac{1}{2}R\right) = \frac{3}{4}R^2$.

Así,$CD^2 = (CB + BD)^2 = CB^2 + \ BD^2 + 2\,BC\,BD = CB^2 + \ BD^2 + \frac{3}{2}R^2$

Así tenemos:

$$10\,R^2 = 2\,AC^2 + \ 2\,AD^2 + 2(BC^2 + \ DB^2)$$

O sea,

$$10\,R^2 = 2\,AC^2 + \ 2\,AD^2 + 2\left(CD^2 - \frac{3}{2}R^2\right)$$

Luego por fin,

$$d^2 + c^2 + a^2 = AC^2 + AD^2 + CD^2 = \frac{13}{2}R^2$$

Así la bisabuela tendría 104 años.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.

España