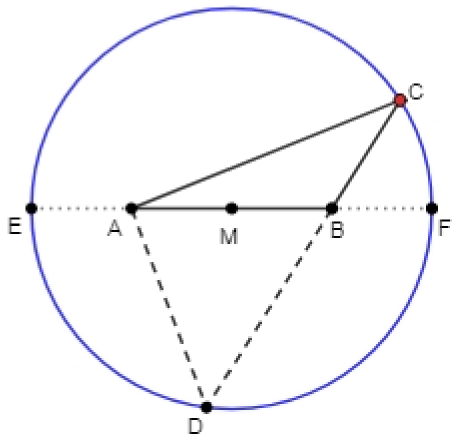
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 807. (Generalización del director a partir del Problema 1 Capítulo 4 de Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría) Dada una circunferencia de radio ρ y diámetro EF, consideremos los puntos A, M y B del segmento EF tales que:

$$EA = AM = MB = BF = \frac{\rho}{2}$$

Sea ADC un triángulo con D y C sobre dicha circunferencia tal que la recta DC contiene al punto B. Probar que $AC^2 + CD^2 + DA^2$ es contante y calcular el valor de dicha constante.

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como el punto medio del segmento AB es $M = (0:1:1)$ y:

$$MC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia consideranda (centrada en el punto M y con radio MC) es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz + S_C(x+y)(x+y+z) = 0$$

por lo que imponiendo que pase por el punto simétrico $E = (3 : -1 : 0)$ del punto M con respecto al punto A, resulta que:

$$2a^2 + 2b^2 - 5c^2 = 0$$

Además, como el punto de intersección de esta circunferencia con la recta BC es:

$$D = (0 : 3a^2 + b^2 - c^2 : -a^2 - b^2 + c^2) \Rightarrow \begin{cases} CD^2 = \dfrac{(3a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} \\ DA^2 = \dfrac{3a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2} \end{cases}$$

entonces:

$$AC^2 + CD^2 + DA^2 = b^2 + \frac{(3a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} + \frac{3a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2} = 3a^2 + 3b^2 - c^2$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

por lo que:

$$AC^2+CD^2+DA^2=AC^2+CD^2+DA^2-\frac{3}{2}\Big(\underbrace{2a^2+2b^2-5c^2}_{=0}\Big)=\frac{13c^2}{2}=\frac{13\rho^2}{2}$$