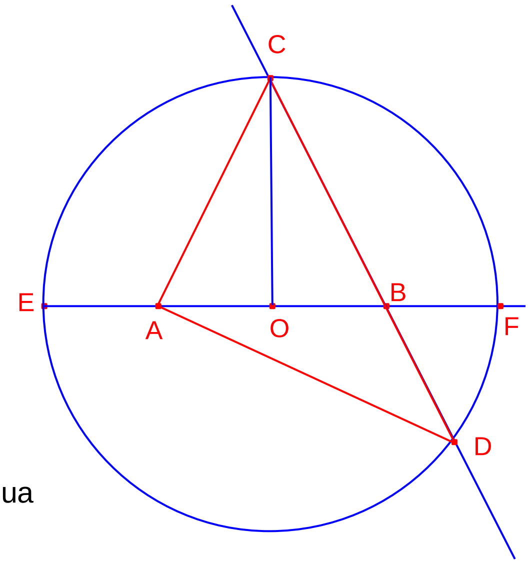
Problema 807

Donada una circumferència de radi R i diàmetre $\overline{EF}$ considerem els punts A. O, B tal que $\overline{AE}=\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{BF}=\frac{1}{2}R$.

Siga $\overset{\Delta}{ADC}$ un triangle genèric de costats a, d, c, amb D i C sobre la circumferència i tal que continguen a B.

Proveu que $a^2+d^2+c^2$ és constant i calculeu el seu valor.



Solució de Ricard Peiró:

Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:

$$\overline{CB}\cdot\overline{DB}=\overline{FB}\cdot\overline{EB}=\frac{1}{2}R\cdot\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R^2. \qquad (1)$$

$\overline{CO}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, amb la fórmula de la seua mesura:

$$R^2=\frac{2d^2+2\overline{CB}^2-R^2}{4}$$. Simplificant:

$$2d^2=5R^2-2\cdot\overline{CB}^2 \qquad (2)$$

$\overline{DO}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, amb la fórmula de la seua mesura:

$$R^2=\frac{2c^2+2\overline{DB}^2-R^2}{4}$$. Simplificant:

$$2c^2=5R^2-2\cdot\overline{DB}^2 \qquad (3)$$

Sumant les expressions (2) (3):

$$d^2+c^2=5R^2-\left(\overline{CB}^2+\overline{DB}^2\right) \qquad (4)$$

$$a^2=\left(\overline{CB}+\overline{DB}\right)^2=\overline{CB}^2+\overline{DB}^2+2\cdot\overline{CB}\cdot\overline{DB} \qquad (5)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (5):

$$a^2=\left(\overline{CB}+\overline{DB}\right)^2=\overline{CB}^2+\overline{DB}^2+2\cdot\frac{3}{4}R^2 \qquad (6)$$

Sumant les expressions (3) (6):

$$a^2+d^2+c^2=5R^2+\frac{3}{2}R^2=\frac{13}{2}R^2.$$