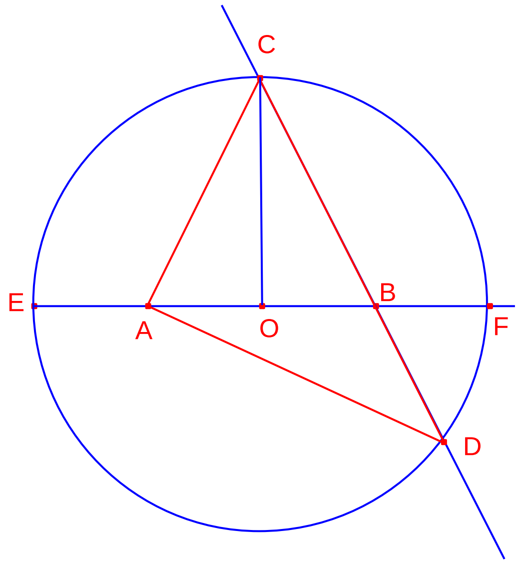
Problema 807

Dada una circunferencia de radio R y diámetro $\overline{EF}$ consideramos los puntoso A. O, B tal que $\overline{AE} = \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{BF} = \frac{1}{2}R$.

Sea $\overset{\Delta}{ADC}$ un triángulo genérico de lados a, d, c, con D y C sobre la circunferencia y tal que contienen a B.

Probar que $a^2 + d^2 + c^2$ es constante y calcular el valor.



Solución de Ricard Peiró:

Aplicando la potencia de B respecto de la circunferencia:

$$\overline{CB} \cdot \overline{DB} = \overline{FB} \cdot \overline{EB} = \frac{1}{2}R \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}R^2. \qquad (1)$$

$\overline{CO}$ es mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, con la fórmula de la medida:

$$R^2 = \frac{2d^2 + 2\overline{CB}^2 - R^2}{4}.$$ Simplificando:

$$2d^2 = 5R^2 - 2 \cdot \overline{CB}^2 \qquad (2)$$

$\overline{DO}$ es mediana del triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$, con la fórmula de la medida:

$$R^2 = \frac{2c^2 + 2\overline{DB}^2 - R^2}{4}.$$ Simplificando:

$$2c^2 = 5R^2 - 2 \cdot \overline{DB}^2 \qquad (3)$$

Sumando las expresiones (2) (3):

$$d^2 + c^2 = 5R^2 - \left(\overline{CB}^2 + \overline{DB}^2\right) \qquad (4)$$

$$a^2 = \left(\overline{CB} + \overline{DB}\right)^2 = \overline{CB}^2 + \overline{DB}^2 + 2 \cdot \overline{CB} \cdot \overline{DB} \qquad (5)$$

Substituyendo la expresión (1) en la expresión (5):

$$a^2 = \left(\overline{CB} + \overline{DB}\right)^2 = \overline{CB}^2 + \overline{DB}^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}R^2 \qquad (6)$$

Sumando las expresiones (3) (6):

$$a^2 + d^2 + c^2 = 5R^2 + \frac{3}{2}R^2 = \frac{13}{2}R^2.$$