Problema 807

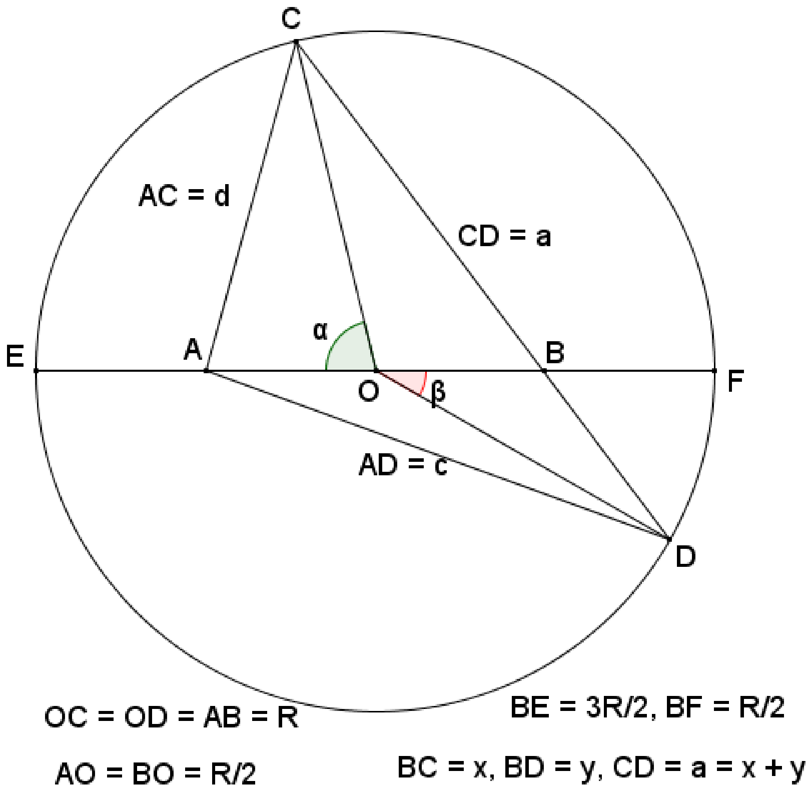
Dada una circunferencia de radio R y diámetro EF, consideremos A O B puntos de EF tal que EA=AO=OB=BF=1/2 R.

Sea ADC un triángulo genérico de lados a d c, con D y C sobre la circunferencia dada y tal que DC contenga a B.

Demostrar que $a^2+d^2+c^{\mathbf{2}}$ es constante y calcular su valor.

Generalización del director a partir del Problema 1 Capítulo 4 de Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



A partir de la loi des cosinus appliquée successivement aux triangles ACO,BCO,ADO et BDO on obtient les relations suivantes (cf notations de la figure ci-contre):

triangle ACO: $d^2 = R^2 + R^2/4 - R^2\cos(\alpha)$, triangle BCO : $x^2 = R^2 + R^2/4 + R^2\cos(\alpha)$

d'où $d^2 + x^2 = 5R^2/2$ (1)

triangle BDO: $y^2 = R^2 + R^2/4 - R^2\cos(\beta)$, triangle ADO : $c^2 = R^2 + R^2/4 + R^2\cos(\beta)$,

d'où $c^2 + y^2 = 5R^2/2$ (2)

Par ailleurs les points C,F,D et E étant cocycliques, les cordes CD et EF se coupent au point B tel que BC.BD = BD.BF soit $xy = 3R^2/4$

Comme $a^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, on en déduit : $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy = a^2 - 3R^2/2$.

L'addition des relations (1) + (2) donne alors l'équation $\mathbf{a^2 + c^2 + d^2 = 13R^2/2}$ qui est une constante ne dépendant pas de la position des points C et D sur le cercle.

Nota: on obtient la même propriété avec les deux points fixes A et B situés symétriquement par rapport au centre O du cercle.