***Problema* 807**.- *Dada una circunferencia de radio $R$ y diámetro $EF$, consideremos $A, O, B$, puntos de $EF$ tal que $EA = AO = OB = BF = \frac{1}{2}R$.*

*Sea $ADC$ un triángulo genérico de lados $a, d, c$, con $D$ y $C$ sobre la circunferencia dada y tal que $DC$ contenga a $B$. Demostrar que $a^2 + d^2 + c^2$ es constante y calcular su valor.*

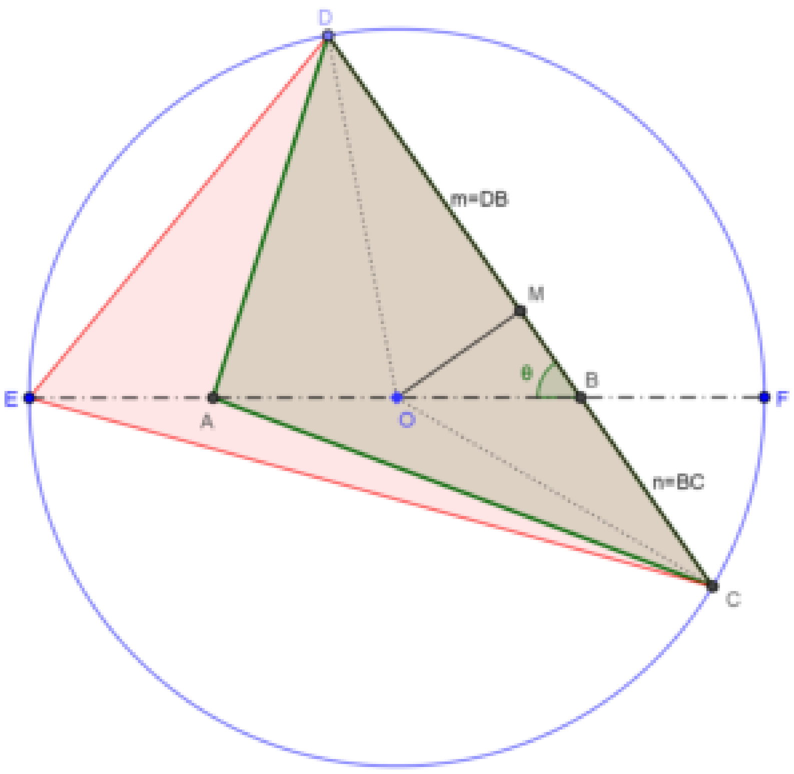
Generalización del director a partir del Problema 1 Capítulo 4 de Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría.

***Capítulo* 4.**

**1**.-*Una bisabuela muy geómetra.*

*A mi bisabuela le ha gustado siempre la geometría. Así que ayer dibujó un círculo de 4 cm de radio, con un diámetro EF dividido en cuatro partes iguales por los puntos A, O (centro del círculo) y B. Luego dibujó una cuerda CD que pasaba por B y formaba un ángulo de 43º con el diámetro EF. Entonces me comentó que su edad era igual a la suma de los cuadrados en $cm^2$ de las longitudes de los lados del triángulo ACD, es decir...*

*Tu turno:*




**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**

De suponer que es cierto el enunciado, si se toma $D$ que coincida con $F$ se obtienen $a^2 = 4R^2$; $d^2 = \frac{R^2}{4}$ y $c^2 = \frac{9}{4}R^2$ que sumado todo da el valor $\frac{13}{2}R^2$, que **SOLO DEPENDE DE** $R$.

Denotamos por $m$ y $n$ los segmentos $DB$ y $BC$ respectivamente: $m + n = a$.

Para calcular la suma de los cuadrados de los lados vamos a aplicar el teorema del coseno a los triángulos $ADB$ y $ABC$ que comparten el lado $AB$.

Para ello necesitamos conocer el valor del coseno del ángulo $\theta = \sphericalangle DBA$.

Sea $M$ el punto medio de $DC$.

De los triángulos $ODM$ y $OMB$ resulta que $OM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$, $MB^2 = \frac{R^2}{4} - OM^2 = \frac{a^2-3R^2}{4}$ por tanto $cos^2\theta = \frac{a^2-3R^2}{R^2}$.

La potencia de $B$ respecto de la circunferencia $(DEC)$ en valor absoluto es

$$m \cdot n = BC \cdot BD = BE \cdot BF = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2.$$

Como $m + n = a$, los segmentos verifican la ecuación $x^2 - ax + \frac{3}{4}R^2 = 0$ de discriminante $\Delta = \sqrt{a^2 - 3R^2} = m - n$, entonces $\cos\theta = \frac{m-n}{R}$ o bien $R \cdot \cos\theta = m - n$.

Ya estamos en condición de aplicar el teorema del coseno. Se tiene

$$d^2 + c^2 = 2R^2 + m^2 + n^2 - 2R\cos\theta \cdot (m - n) = 2R^2 + m^2 + n^2 - 2(m - n)^2$$
$$= 2R^2 - m^2 - n^2 + 4mn = 2R^2 - a^2 + 6mn = 2R^2 - a^2 + \frac{9}{2}R^2$$

Transponiendo $a^2$ resulta finalmente $a^2 + d^2 + c^2 = \frac{13}{2}R^2$, que era el valor esperado.

La edad de la bisabuela se obtiene para $R = 4$ y es $13 \cdot 8 = 104$ años.

∎