Problema 808

Resoleu un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts r (radi de la circumferència inscrita), r_a (radi de la circumferència exinscrita relatiu al vèrtex A i $b-c$.

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solució:

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{AB}$.

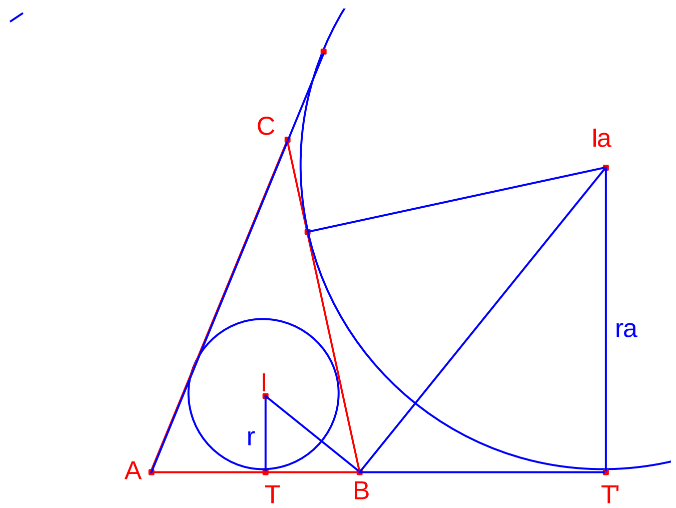
Siga R el punt de tangència de la circumferència exinscrita i la prolongació del costat $\overline{AB}$.

Siga $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Siga $d=b-c$.

$\overline{BT}=p-b=\dfrac{a-d}{2}$, $BT'=p-c=\dfrac{a+d}{2}$.

$\overline{AT}=p-a$, $\overline{AT'}=p$.



Els triangles $\overset{\Delta}{BTI}$, $I_a\overset{\Delta}{T'}B$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{\overline{BT}}=\frac{\overline{BT'}}{r_a}.$$

$$\frac{2r}{a-d}=\frac{a+d}{2r_a}.$$

$$a^2=4r\cdot r_a+d^2.$$

$$a=\sqrt{4r\cdot r_a+d^2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ATI}$, $A\overset{\Delta}{T'}I_a$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{\overline{AT}}=\frac{r_a}{\overline{AT'}}.$$

$$\frac{r}{p-a}=\frac{r_a}{p}.$$

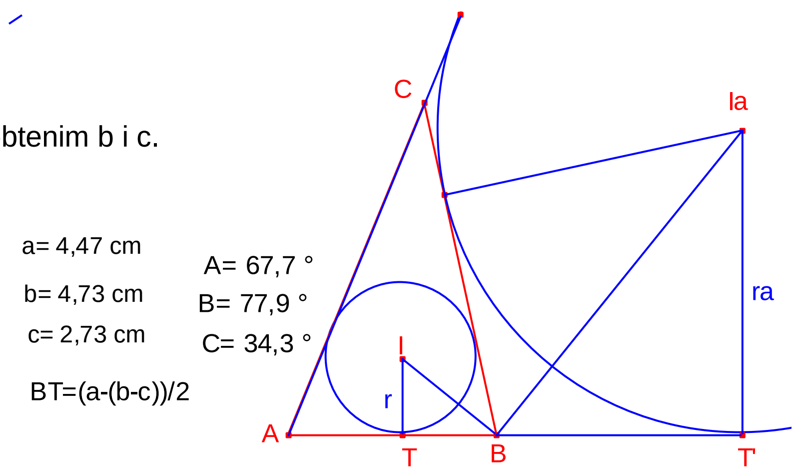
$$2p=a+b+c=\frac{a\cdot r_a}{r_a-r}.$$

$\begin{cases} b+c=\dfrac{a\cdot r_a}{r_a-r}-a \\ b-c=d \end{cases}$. Resolent el sistema obtenim b i c.

Exemple:

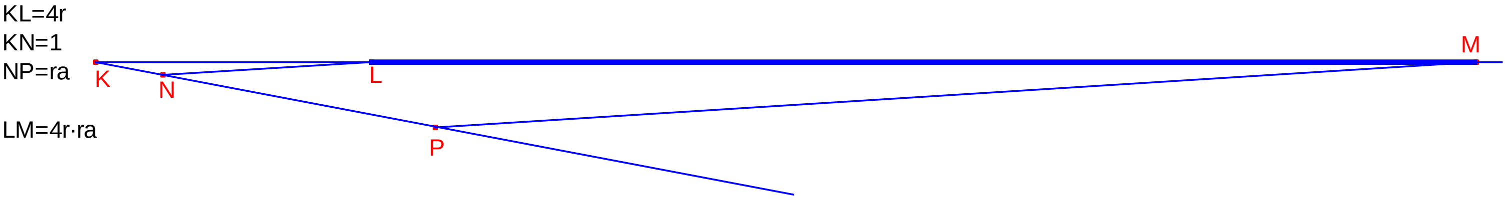
Si $r=1$, $r_a=4$ i $b-c=2$:

$a=2\sqrt{5}$, $b=\dfrac{3+5\sqrt{5}}{3}$, $c=\dfrac{3+5\sqrt{5}}{3}$.

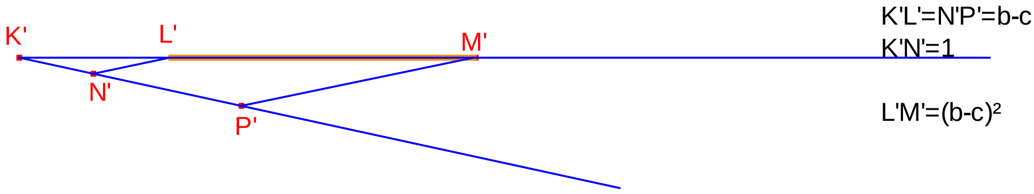


Construcció amb regle i compàs:

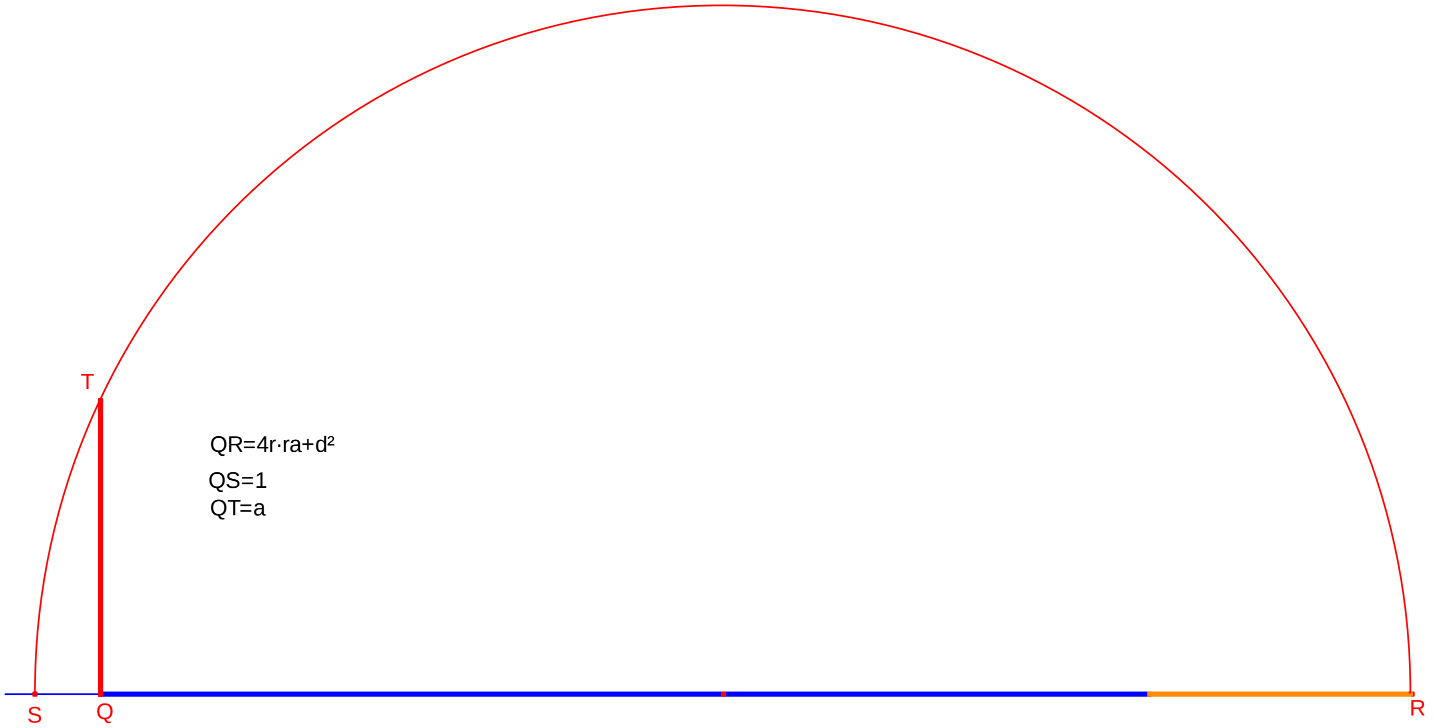
1.- Construir $4r \cdot r_a$



2.- Construir $d^2 = (b-c)^2$.



3. Construir $a = \sqrt{4r \cdot r_a + d^2}$.



4.- Dibuixar $\overline{BT} = p - b = \dfrac{a-d}{2}$.

5.- Dibuixar la circumferència inscrita de centre I i radi $\overline{IT} = r$.

6.- Dibuixar la recta que passa per B i tangent a la circumferència inscrita.

7.- Dibuixar $\overline{BC} = a$.

8.- Dibuixar la recta que passa per C i tangent a la circumferència inscrita.

9. Dibuixar la intersecció A de la recta tangent anterior i la recta BT.

10.- Dibuixar el triangle.