ÉLÉGANCE 9

SERBIA NATIONAL OLYMPIAD 2013, PROBLEM 3

REVISITED

BY

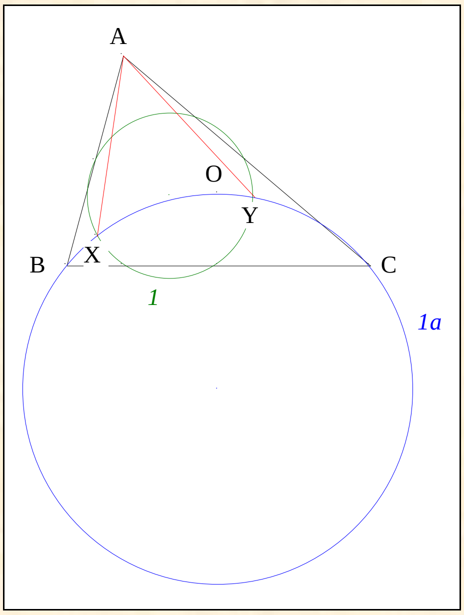
THE AUTHOR

Qu'est ce qui vous plait le plus dans une preuve synthétique ?
C'est son élégance. [1]

What you like most in a synthetic proof ?
Its elegance.

¿Qué es lo que más gusta en una prueba sintética ?
Su elegancia.

Jean - Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur revisite d'une façon personnelle le problème **3** des Olympiades Nationales de Mathématiques de Serbie en 2013. Des développements ainsi qu'un lexique sont présentés.

---

1 Qualité de ce qui est exprimé avec justesse et agrément, avec une netteté sobre, sans lourdeur

2 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 29/02/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author revisits in a personal way the problem **3** of the Serbia National Mathematic Olympiad in 2013. Developments as well as a glossary are presented.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Resumen. El autor retoma de manera personal el problema **3** Olimpiadas matemáticas nacionales de Serbia en 2013. Se presenta los desarrollos, así como un glosario.
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Sommaire

A. Le problème **3** 3

B. Visualisation 6

C. Des résultats 9
- **1.** Deux parallèles
- **2.** Par le point N
- **3.** Deux perpendiculaires

D. Un point remarquable sur *1'a* 13
- **1.** Un alignement
- **2.** Une "concourance"
- **3.** Un point sur (XY)
- **4.** Le cercle *1'a*

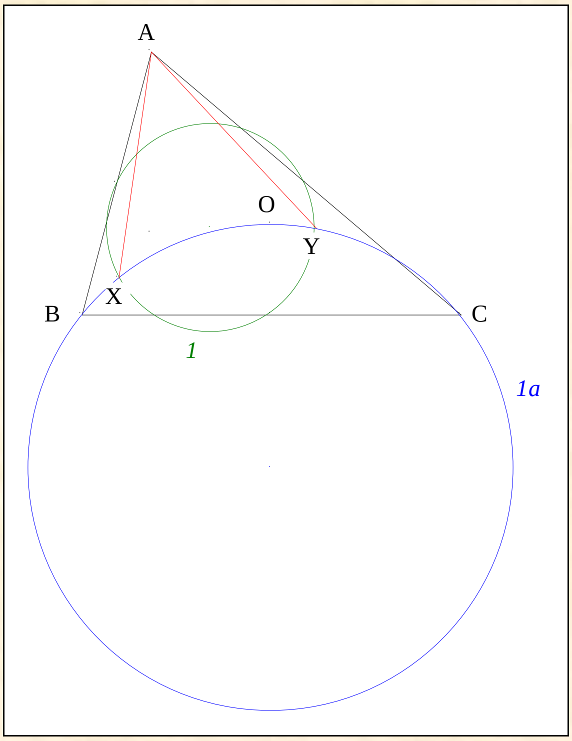
E. Appendice 19
- **1.** Un rapport
- **2.** Un cercle passant par le centre d'un cercle

F. Lexique 24

A. LE PROBLÈME 3 [3]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle d'Euler [4] de ABC,
1a la A-cercle de Kosnitza [5] de ABC
et X, Y les points d'intersection de *1a* et *1*.

Donné : <BAX = <YAC.

Commentaire : cette élégante figure a attiré l'attention de l'auteur.

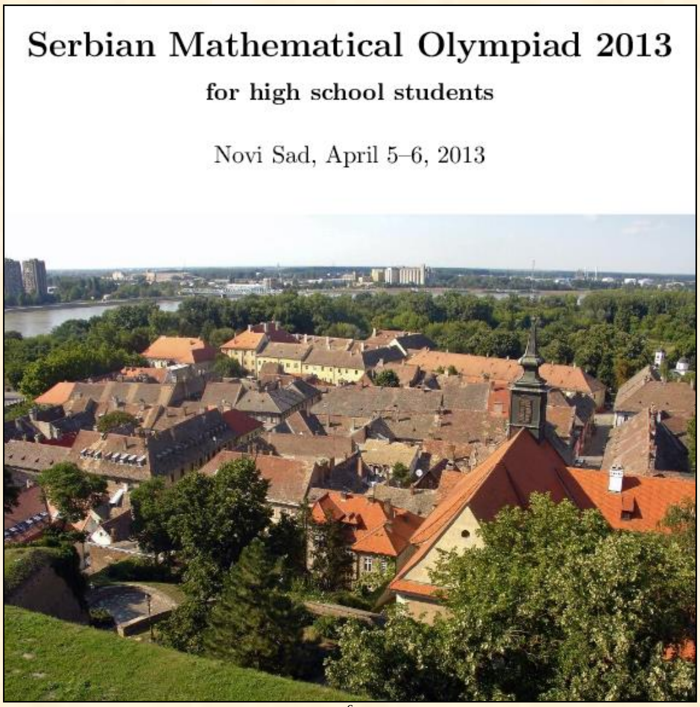
---

3 *Art of Problems solving* ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c3638_2013_serbia_national_math_olympiad
Sitio : *Triangulos cabri* du professeur Ricardo Barosso ; Problema **809** ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

4 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler…, G.G.G. vol. **2**, p. 4-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

5 il passe par B, O et C

Note historique :



Serbian Mathematical Olympiad 2013

for high school students

Novi Sad, April 5–6, 2013

[6]

SERBIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

for high school students

Novi Sad , 05.04.2013.

First Day

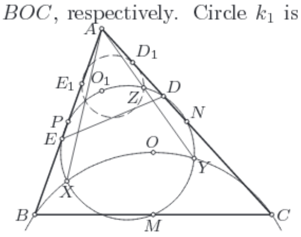
3. Let M, N and P be the midpoints of sides BC, AC and AB respectively, and O be the circumcenter of an acute-angled triangle ABC. The circumcircles of triangles BOC and MNP intersect at distinct points X and Y inside the triangle ABC. Prove that

$$\measuredangle BAX = \measuredangle CAY.$$

(Marko Djikić)

[6] Photo : Petrovaradin
http://srb.imomath.com/zadaci/2013_smo_booklet.pdf

3. Denote by k_1 and k_2 the circles MNP and BOC, respectively. Circle k_1 is the nine-point circle of $\triangle ABC$ and passes through the feet D, E of the altitudes BD and CE and the midpoint O_1 of AH, where H is the orthocenter of $\triangle ABC$.

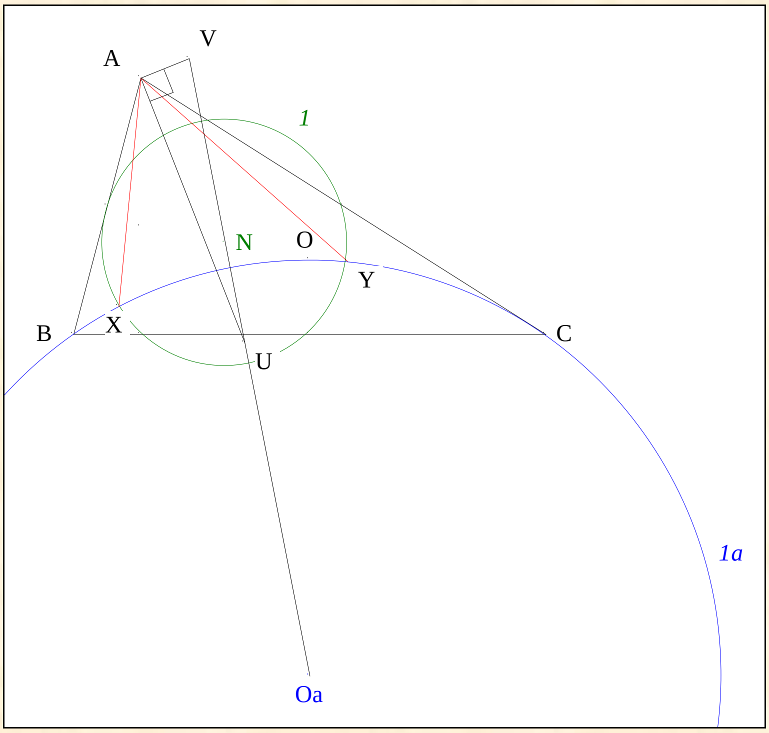


We claim that the second intersection point Z of AY and k_1 lies on the nine-point circle k_3 of triangle ADE. We assume that Z is between A and Y; the other case is analogous. Let D_1 and E_1 be the midpoints of AD and AE, respectively. Since $AY \cdot AZ = AD \cdot AN = AD_1 \cdot AC$, points Y, Z, C, D_1 lie on a circle, implying $\angle AZD_1 = \angle ACY$. Analogously, $\angle AZE_1 = \angle ABY$, and therefore $\angle D_1ZE_1 = \angle AZD_1 + \angle AZE_1 = \angle ACY + \angle ABY = \angle BYC - \angle BAC = \angle BAC$. Hence Z is on k_3.

Since O_1 is the circumcenter of $\triangle ADE$, the similarity mapping $\triangle ABC$ onto $\triangle ADE$ maps k_1 to k_2 and k_2 to k_3, so it takes point $X \in k_1 \cap k_2$ to point $Z \in k_2 \cap k_3$. Therefore $\angle BAX = \angle DAZ = \angle CAY$.

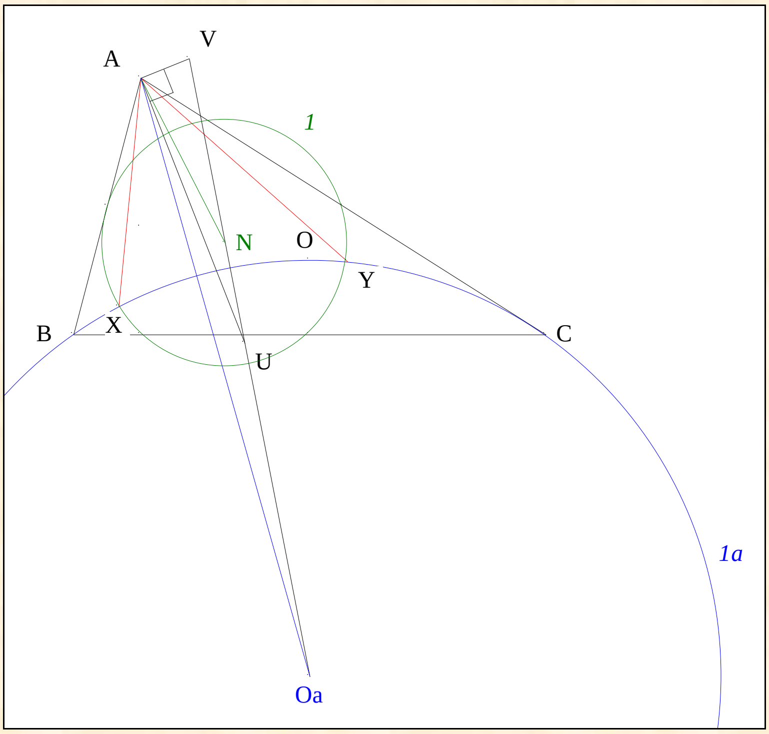
Second solution. Apply the inversion with center A and power $\frac{1}{2} AB \cdot AC$, and then reflect in the bisector of angle CAB. Points B, C and N, P go to N, P and B, C respectively. Furthermore, point O satisfies $\angle ANO = \angle APO = 90°$, so its image O' satisfies $\angle AO'B = \angle AO'C = 90°$, i.e. AO' is an altitude in $\triangle ABC$. It follows that circle $\omega_1(NO'P)$ maps to circle $\omega_2(BOC)$, and vice-versa. Therefore their intersection points X, Y map to each other, and consequently $\angle BAX = \angle CAY$.

B. VISUALISATION



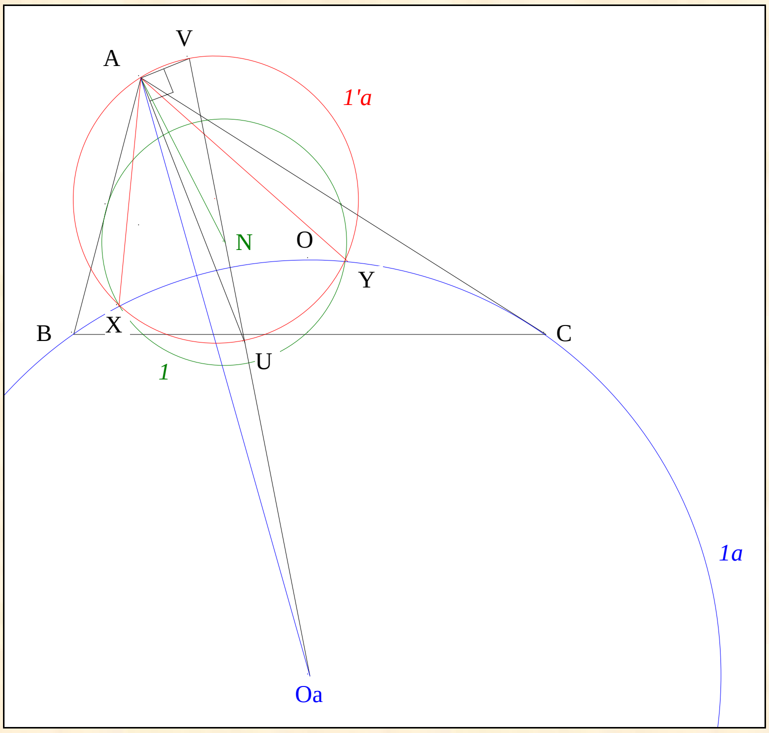
- Notons N, Oa les centres resp. de *1*, *1a*
  et U, V les pieds des A-bissectrice in, ex-térieure de ABC sur (NOa).

- **Note historique :** l'idée fructueuse d'introduire les "A-bissectrices" a été proposée par Vladimir Zajic plus connu sous le pseudonyme de Yetti sur le site *Mathlinks* [7].



[7] Intersection of circumcircles of MNP and BOC, AoPS du 08/04/2013 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h528741p3009467

- D'après John Rigby "Isogonal du centre du cercle d'Euler" [8],
  (AN) et (AOa) sont deux A-isogonales de ABC ;
  en conséquence, (AU) et (AV sont resp. les A-bissectrice in, ex-térieure du triangle ANOa.



- Notons *1'a* le cercle circonscrit à ANOa
  et r, Ra les rayons resp. de *1*, *1a*.

- **Scolies :** **(1)** *1'a* est la A-cercle d'Apollonius [9] de ANOa

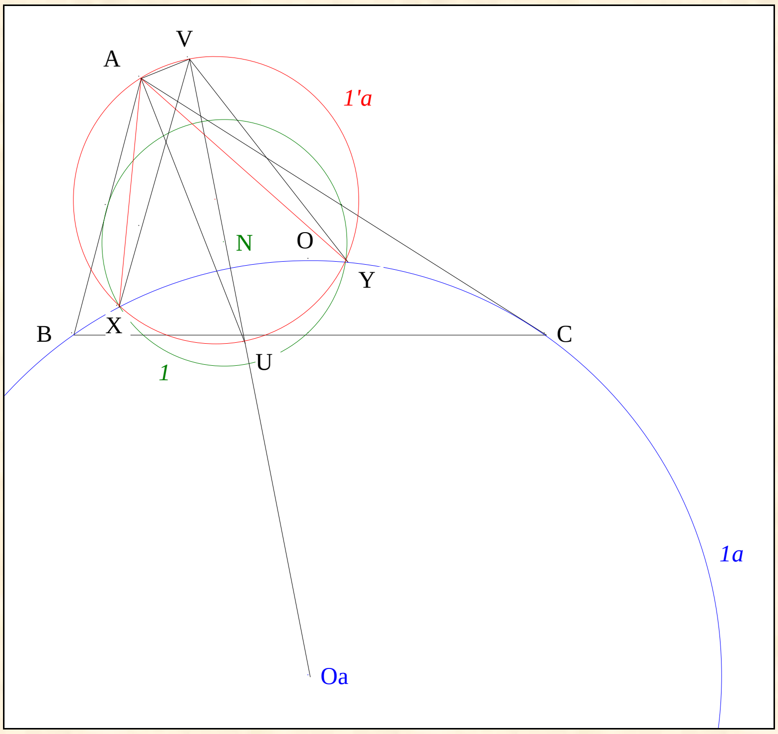
  (2) *1'a* est en anglais " the circle of similitude of *1* and *1a* ". [10]

- D'après **E.** Appendice **1**, AN/AOa = r/Ra.

- **Conclusion partielle :** *1'a* passe par X et Y. [11]

---

[8] Ayme J.-L., Le point de Kosnitza, G.G.G. vol. **1**, p. 14-16 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[9] il a pour diamètre [UV] et passe par A
[10] Casey John, *A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, Dublin (1888) 86
[11] Casey John, *A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, Dublin (1888) 86



- **Scolie :** (NOa) est un axe de symétrie de *1'a*.

- Une première chasse angulaire :

  * par "Angles inscrits", <XAU = <XVU
  * par symétrie d'axe (UV), <XVU = <UVY
  * par "Angles inscrits", <UVY = <UAY
  * par transitivité de =, <XAU = <UAY.

- Une second chasse angulaire :

  * par décomposition, <BAX = <BAU - <XAU
  * ou encore, <BAU - <XAU = <UAC - <UAY
  * par différence, <UAC - <UAY = <YAC

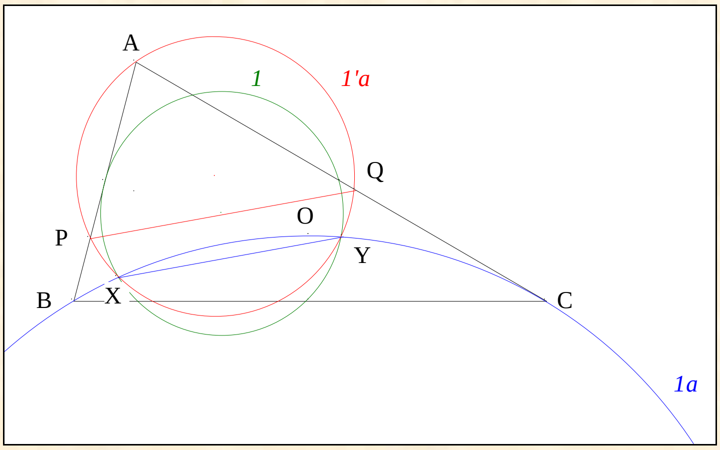
- **Conclusion :** par transitivité de =, <BAX = <YAC.

C. DES RÉSULTATS

1. Deux parallèles [12]

VISION

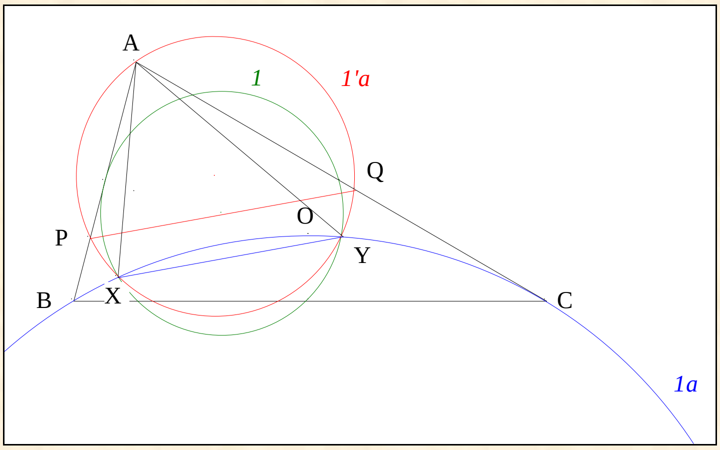
Figure :



Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle d'Euler de ABC,
1a la A-cercle de Kosnitza de ABC,
X, Y les points d'intersection de *1a* et *1*,
1'a le cercle circonscrit au triangle AXY,
et P, Q les points d'intersection de *1'a* resp. avec (AB), (AC).

Donné : (PQ) est parallèle à (XY).

VISUALISATION



- D'après **A.** Le problème **3**, <BAX = <YAC ;

[12] Ayme J.-L., Easy if…, AoPS du 11/02/2017
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1381518_easy_if

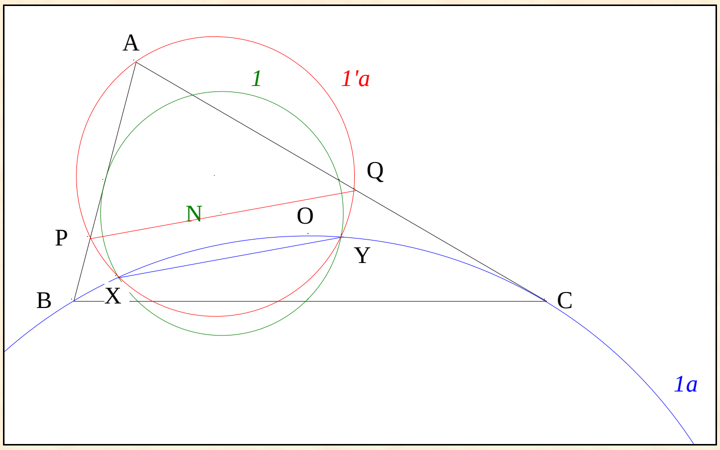
par une autre écriture, <PAX = <YAQ.

- Par construction, X et Y sont intérieurs à ABC.
- **Conclusion :** PX étant égal à QY, (PQ) est parallèle à (XY).

2. Par le point N [13]

VISION

Figure :

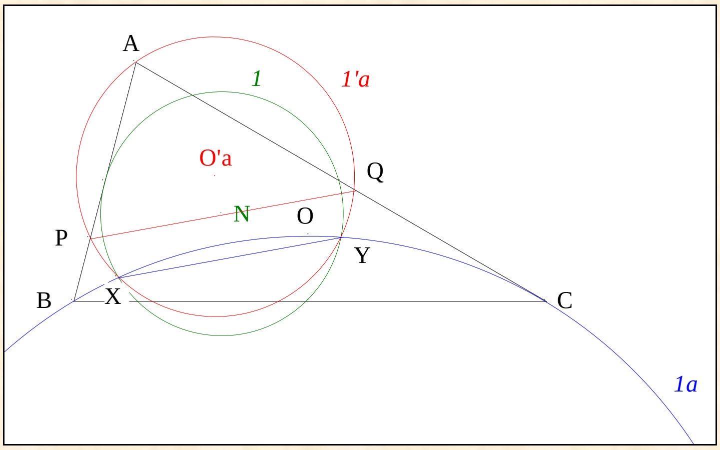


Traits :	ABC	un triangle,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	1	le cercle d'Euler de ABC,
	N	le centre de *1*,
	1a	la A-cercle de Kosnitza de ABC,
	X, Y	les points d'intersection de *1a* et *1*,
	1'a	le cercle circonscrit au triangle AXY,
et	P, Q	les points d'intersection de *1'a* resp. avec (AB), (AC).

Donné : (PQ) passe par N.

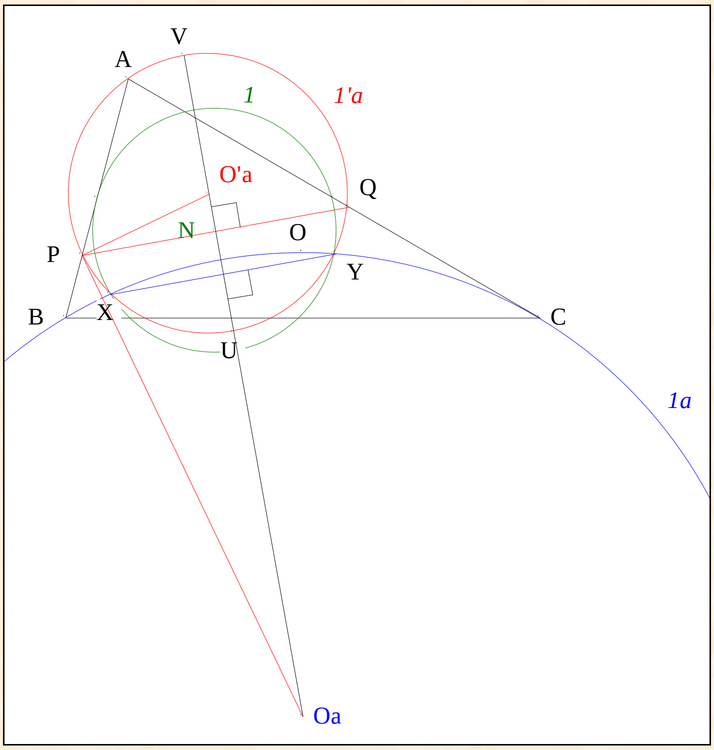
VISUALISATION

[13] Ayme J.-L., A line through N, AoPS du 12/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1382096_a_line_hrough_n



- D'après **A.** Le problème **3**, <BAX = <YAC.

- D'après **D. 1.** Deux parallèles, (PQ) est parallèle à (XY).



- Notons Oa, O'a, N les centres resp. de *1a*, *1'a*, *1*
  et U, V les pieds des A-bissectrice in, ex-térieure de ABC sur (NOa).

- D'après **B.** Visualisation, **(1)** U et V sont sur *1'a*

  (2) la quaterne (Oa, N, U, V) est harmonique.

- D'après Newton [14], O'a étant le milieu de [UV], O'aU² = O'aN.O'aOa
  ou encore, O'aP² = O'aN.O'aOa.

- **Conclusion partielle :** N est le pied de la P-hauteur du triangle POaO'a rectangle en P.

- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que N est le pied de la Q-hauteur du triangle QOaO'a rectangle en Q.

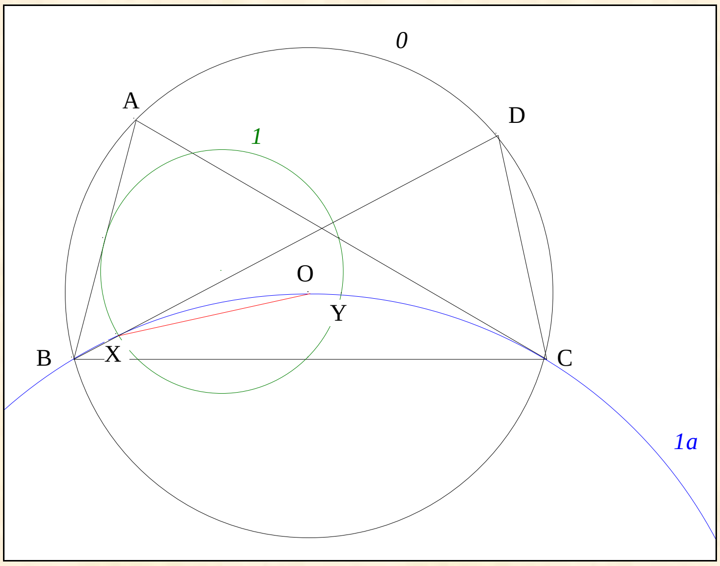
[14] Lebossé C. et Hémery C., Géométrie, Fernand Nathan (1961) , réimpression Jacques Gabay (1990) p. 167

- **Conclusion :** N est le milieu de [PQ].

3. Deux perpendiculaires [15]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
1 le cercle d'Euler de ABC,
N le centre de *1*,
1a la A-cercle de Kosnitza de ABC,
X, Y les points d'intersection de *1a* et *1*,
et D le second point d'intersection de (BX) avec *0*.

Donné : (OX) est perpendiculaire à (CD).

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après **E.** Appendice **2**, (OX) est perpendiculaire à (CD).

---

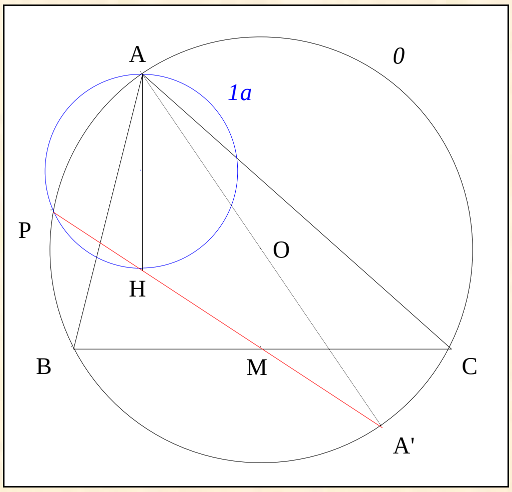
[15] Ayme J.-L., Two perpendiculars, AoPS du 05/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c4h1378034_two_perpendiculars
Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 05/02/2017 ;
https://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1378030_an_isoceles_triangle

D. UN POINT REMARQUABLE SUR *1'a*

1. Un alignement

VISION

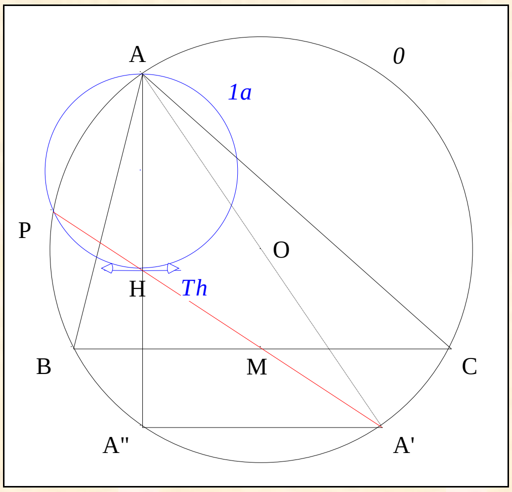
Figure :



Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
A' l'antipôle de A relativement à *0*,
H l'orthocentre de ABC,
1a le cercle de diamètre [AH],
et P le second point d'intersection de *1a* avec *0*.

Donné : P, H, M et A' sont alignés.

VISUALISATION



- Notons A" le second point d'intersection de (AH) avec *0*
  et *Th* la tangente à *1a* en H.

- O et H étant deux points isogonaux de ABC, (A'A") // (BC) ;
  nous savons que (BC) // *Th* ;
  par transitivité de //, (A'A") // *Th*.

- Les cercles *0* et *1a*, les points de base A et P, la moniennes (A"AH), les parallèles (A'A") et *Th*, conduisent au théorème **1** de Reim ; en conséquence, A', P et H sont alignés.

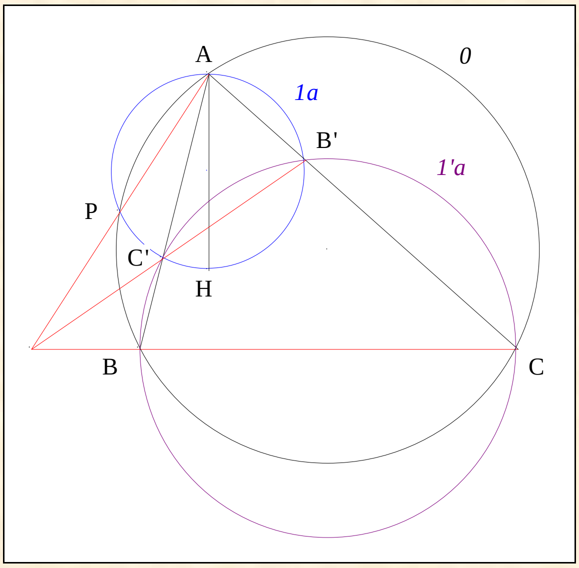
- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", A', M et H sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, H, M et A' sont alignés.

2. Une "concourance" [16]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
A'B'C' le triangle orthique de ABC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
H l'orthocentre de ABC,
1a le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
P le second point d'intersection de *1a* avec *0*
et *1'a* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.

Donné : (AP), (B'C') et (BC) sont concourantes.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" [17]

---

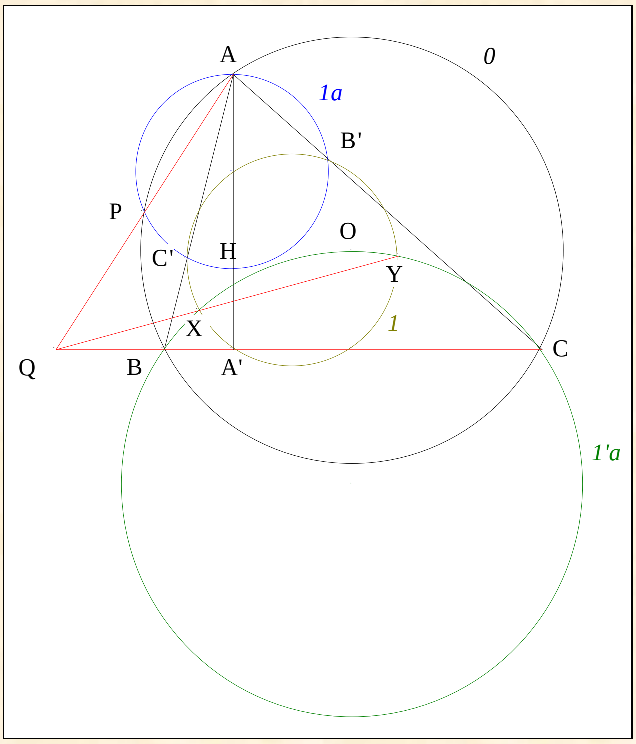
[16] Geogmetry, AoPS du 09/11/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1161051_geogmetry
[17] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

appliqué aux cercles *0*, *1a* et *1'a*, (AP), (B'C') et (BC) sont concourantes.

3. Un point sur (XY)

VISION

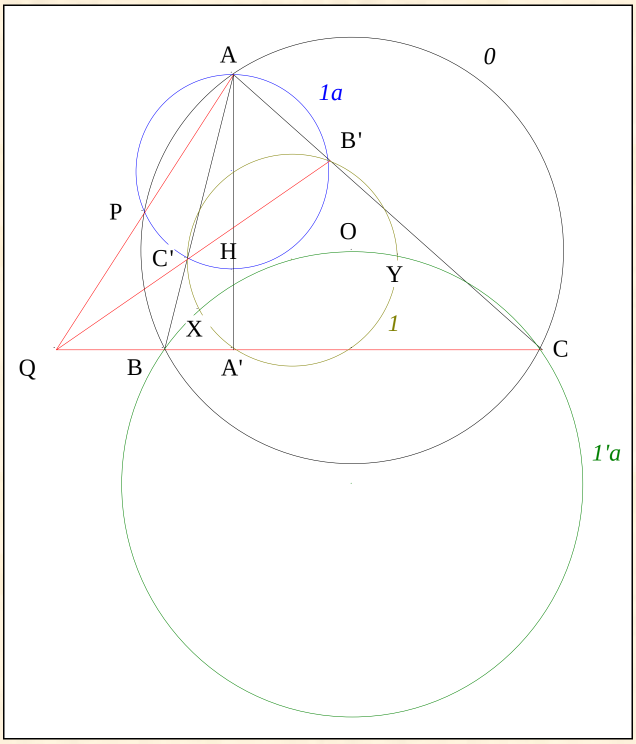
Figure :



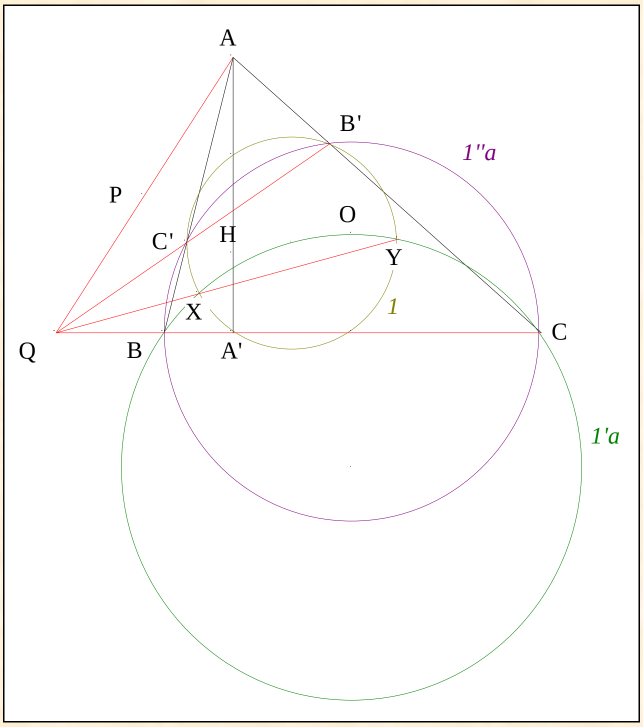
Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	1a	le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
	1	le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', B', C' ;
	1'a	le cercle circonscrit au triangle BOC,
	X, Y	les points d'intersection de *1'a* avec *1*
et	Q	le point d'intersection de (AP) et (BC)

Donné : (XY) passe par Q.

VISUALISATION



- D'après **D. 2.** Une "concourance", (B'C') passe par Q.



- Notons *1''a* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.

- D'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" [18]
  appliqué aux cercles *1*, *1''a* et *1'a*, (B'C'), (BC) et (XY) sont concourantes.

- **Conclusion :** (XY) passe par Q.

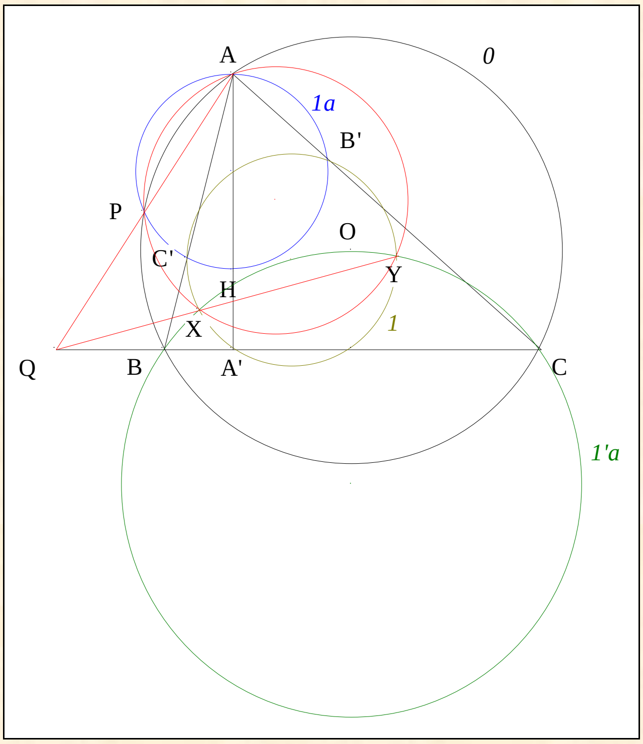
---

[18] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

4. Le cercle *1'a*

VISION

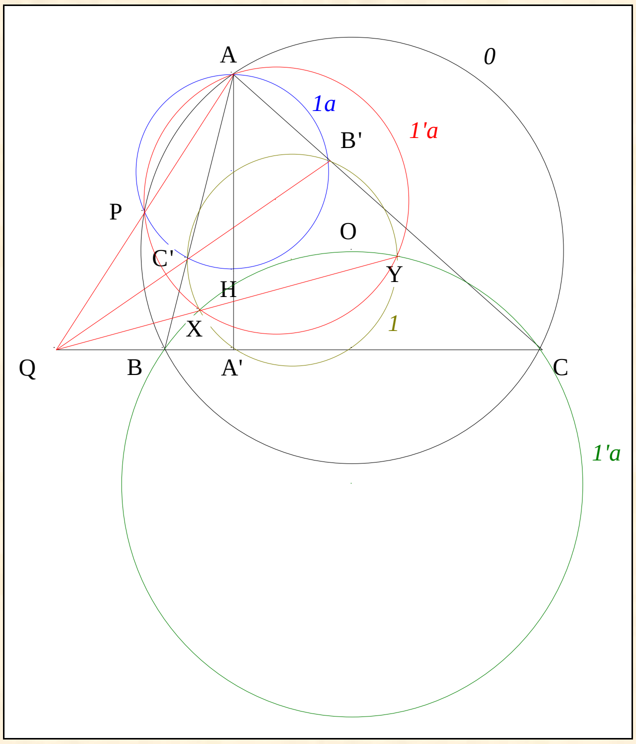
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle orthique de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	1a	le cercle de diamètre [AH] ; il passe par B' et C' ;
	1	le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', ', C' et M ;
	1'a	le cercle circonscrit au triangle BOC,
	X, Y	les points d'intersection de *1'a* avec *1*
et	Q	le point d'intersection de (AP) et (BC)

Donné : A, P, X et Y sont cocycliques.

VISUALISATION



- Par hypothèse, (AP) passe par Q.
- D'après **D. 2.** Une "concourance", **(1)** (B'C') passe par Q

  (2) (XY) passe par Q.
- **Conclusion :** d'après Gaspard Monge "Le théorème des trois cordes" [19] appliqué aux cercles *1* et *1a*, A, P, X et Y sont cocycliques.
- Notons *1'a* ce cercle.

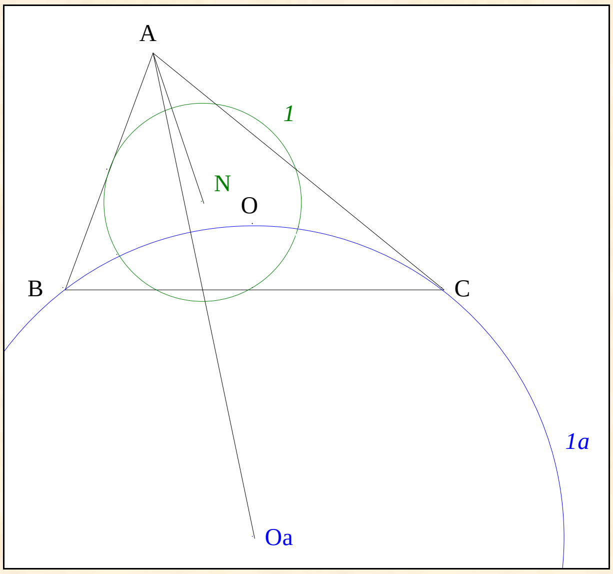
[19] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

E. APPENDICE

1. Un rapport [20]

VISION

Figure :

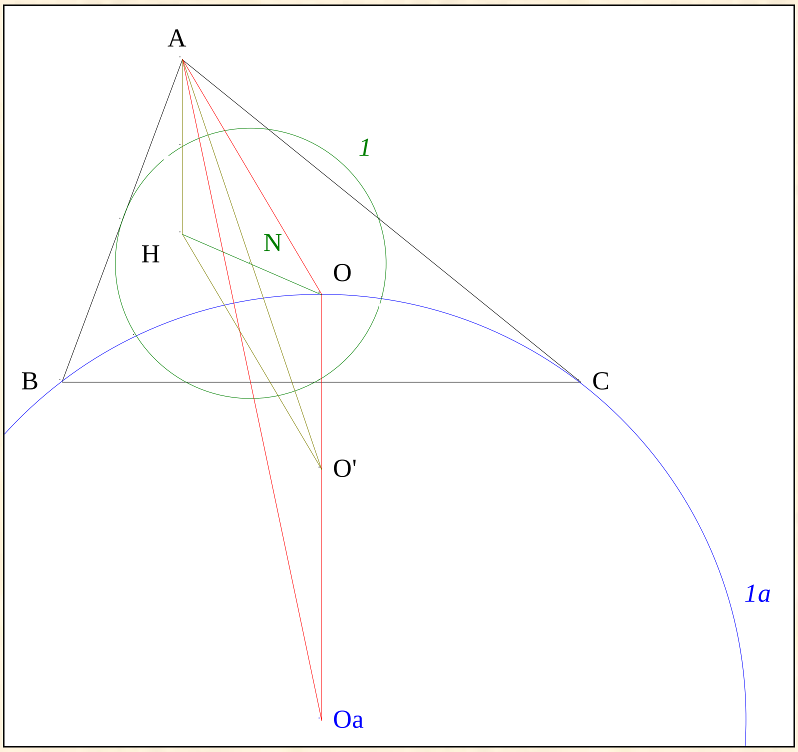


Traits : ABC un triangle,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1 le cercle d'Euler de ABC,
N le centre de *1*,
1a la A-cercle de Kosnitza de ABC,
Oa le centre de *1a*
et r, Ra les rayons resp. de *1*, *1a*.

Donné : AN/AOa = r/Ra.

VISUALISATION

[20] Ayme J.-L., A result, AoPS du 12/02/2017 ; https://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1382125_a_result



- Notons H l'orthocentre de ABC
  et O' le symétrique de O par rapport à (BC).

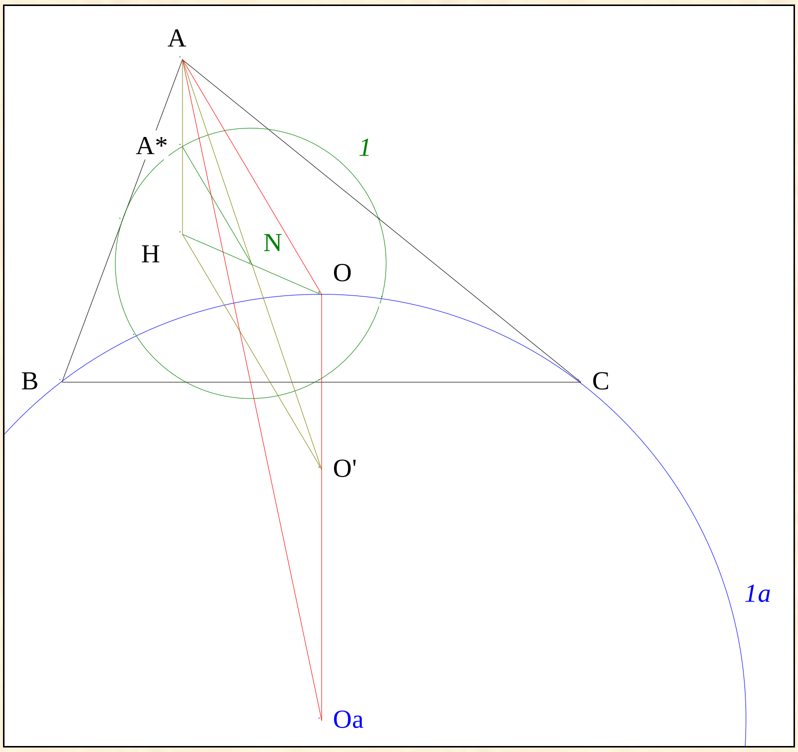
- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère AHO'O est un parallélogramme

  (2) <O'HA = <AOOa.

- D'après Christian von Nagel [21],
  (AH) étant (AO) sont deux A-isogonales de ABC, <HAO' = <OaAO.

- **Conclusion partielle :** les triangles AHO' et AOOa sont semblables.

[21] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-22 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons A* le A-point d'Euler de ABC. [22]

- **Scolie :** A* est sur *1*.

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle AHO', (A*N) // (HO') ;
  en conséquence, les triangles AA*N et AHO' sont homothétiques.

- **Conclusion partielle :** les triangles AA*N et AOOa sont semblables.

- Nous avons AN/AOa = A*N/OOa i.e. AN/AOa = NA*/OaO.

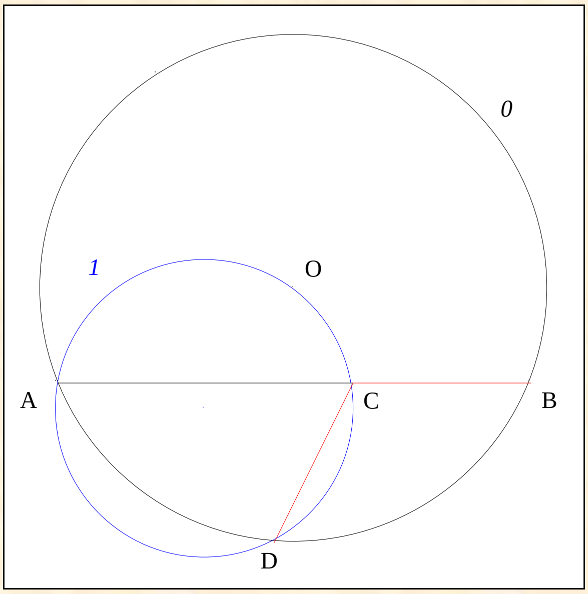
- **Conclusion :** AN/AOa = r/Ra.

[22] A* est le milieu de [AH]

2. Un cercle passant par le centre d'un cercle [23]

VISION

Figure :

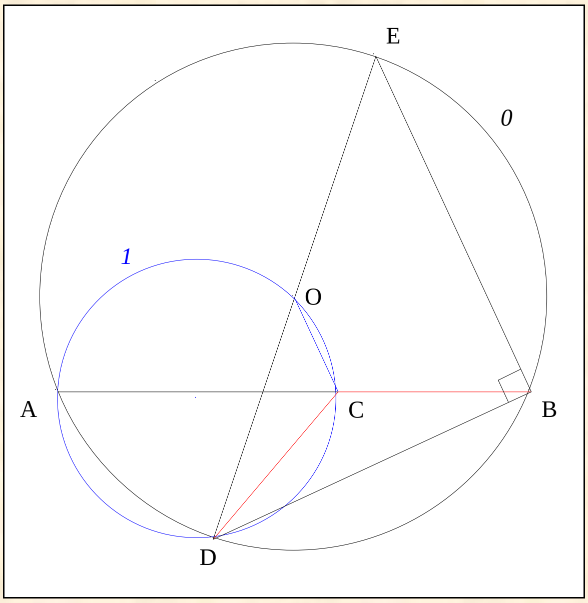


Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
[AB] une corde de *0*,
C un point de [AB]
1 le cercle passant par A, O, C
et D le second point d'intersection de *1* et *0*.

Donné : CB = CD.

VISUALISATION

[23] Easy Geometry, AoPS du 22/04/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1080717_easy_geometry
Un charmant exercice, *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8



- Notons E le second point d'intersection de (DO) avec *0*.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base D et A, les moniennes (ODE) et (CAB), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (OC) // (EB).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (EB) ⊥ (BD) ;
  en conséquence, (OC) ⊥ (BD).

- **Conclusion :** (OC) étant la médiatrice de [BD],
  d'après "Le théorème de la médiatrice", CB = CD.

F. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle