Problema 809.
Propuesto por Jean Louis Aymé.
3.- Sean M, N, P los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente, y O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC. Las circunferencias circunscritas de los triángulos BOC y MNP intersecan en dos puntos X e Y diferentes. en el interior del triángulo ABC. Demostrar que <BAX=<CAY.
Olimpiada Serbia (2013) . http://srb.imomath.com/zadaci/2013_smo_booklet.pdf

Solution proposée par Philippe Fondanaiche
On trace le point Z à l'intérieur du triangle ABC tel que les triangles ABX et AZN sont semblables avec $\angle$BAX = $\angle$ZAN. On va démontrer que le point Z est confondu avec le point Y.L'égalité des angles $\angle$BAX et $\angle$CAY en découle..
La similitude des triangles ABX et AZN est obtenue avec $\angle$ZAN = $\angle$ZAC = $\angle$BAX et AZ/AN = AB/AX, ce qui équivaut à AZ.AX = AB.AN
Il en résulte que les triangles AZB et ANX sont eux aussi semblables. La figure n°1 ci-après représente ces deux couples de triangles.
Par ailleurs comme P est milieu de AB et N milieu de AC, on a AB = 2AP et AC = 2AN. D'où AZ.AX = AB.AN = AC.AP ==> non seulement AZ/AC = AP/AX et les triangles AZC et APX sont semblables mais aussi AZ/AP = AC/AX et les triangles AZP et ACX sont eux aussi semblables. La figure n°2 ci-après représente ces deux couples de triangles.

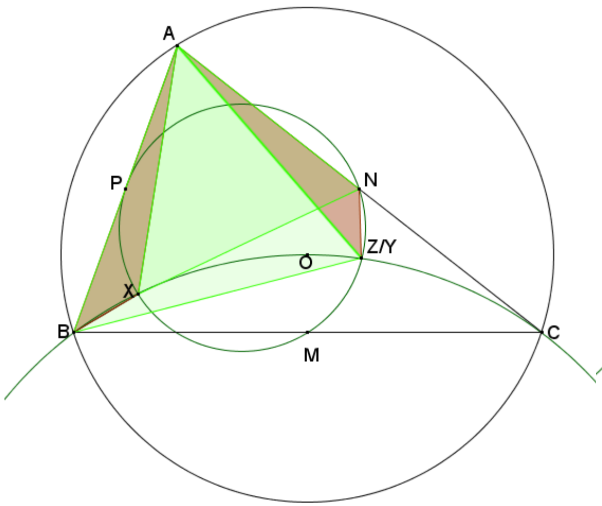

figure n°1

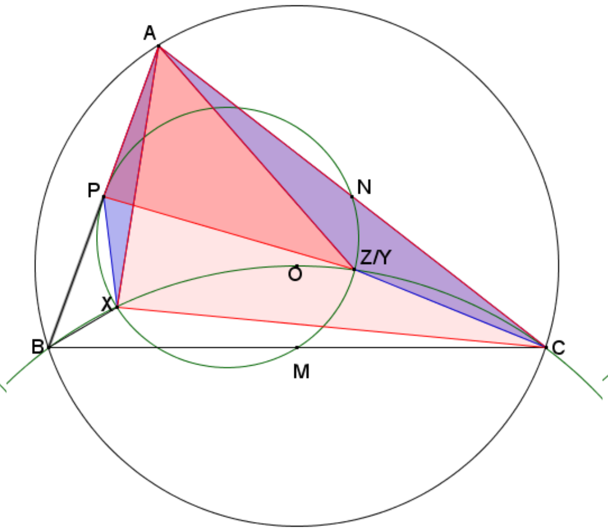

figure n°2

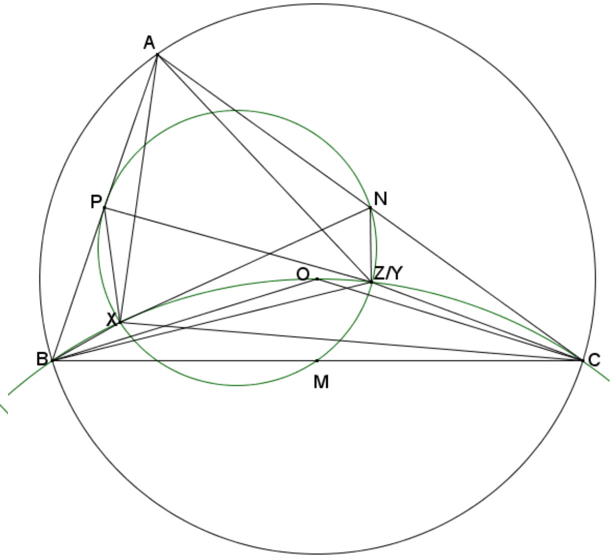

figure n°3

On établit alors les deux séquences suivantes de relations d'angles (cf figure n°3):
1) $\angle$NZP = $\angle$NZA + $\angle$AZP = $\angle$XBA + $\angle$XCA = $\angle$XBC – $\angle$BAC (cf quadrilatère concave ABXC) = $\angle$BOC – $\angle$BAC = $\angle$BAC = $\angle$NMP ==> le point Z appartient au cercle d'Euler du triangle ABC.
2) $\angle$ZBA + $\angle$ZCA = $\angle$NXA + $\angle$PXA = $\angle$NMP = $\angle$BAC. Comme $\angle$BZC – $\angle$BAC = $\angle$ZBA + $\angle$ZCA (cf quadrilatère concave ABZC), on déduit $\angle$BZC = 2$\angle$BAC ==> le point Z appartient au cercle circonscrit au triangle BOC.
Conclusion: le point Z qui est à l'intersection du cercle d'Euler du triangle ABC et du cercle circonscrit au triangle BOC tout en étant distinct du point X est nécessairement confondu avec Y.