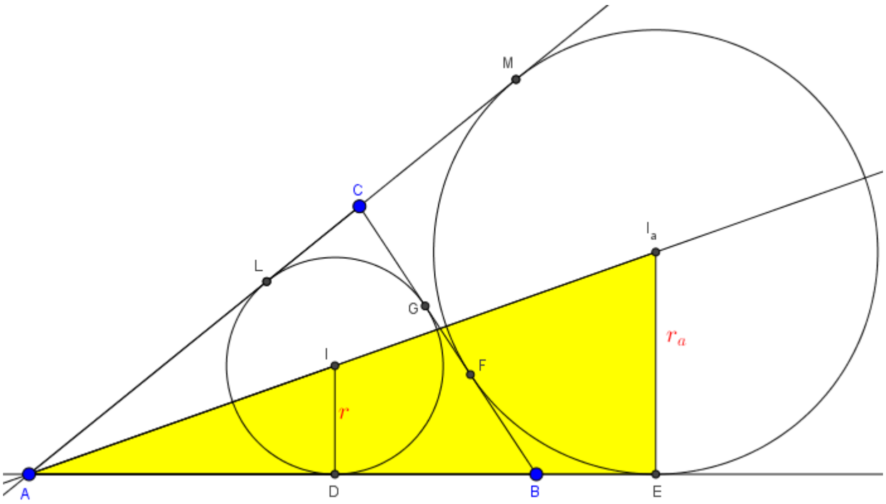
Problema 810.-
Construir el triángulo cuyos daos son $r, r_a \ y \ (b+c)$.

Santamaría, J (2017) Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea la construcción del triángulo requerido. Sea dada la relación existente entre ambos radios:



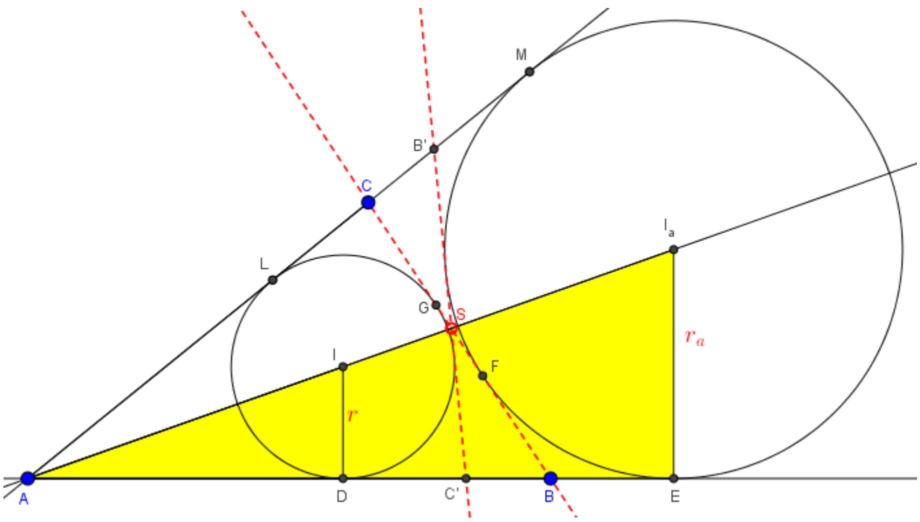
$$\frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p},$$
$siendo\ 2p = a + b + c.$

Por tanto,
$r_a(p-a) - pr = 0;$
$r_a(-a+b+c) - r(a+b+c) = 0;$
$a \cdot (r + r_a) = (r_a - r)(b+c).$

Por tanto, el segmento *a* es la cuarta proporcional de los segmentos conocidos $(r + r_a),\ (r_a - r)\ \ y\ \ (b+c)$.

Una vez determinado el segmento *a*, podemos construir los segmentos $a = BC = DE = LM\ (ver\ figura)$.
$p = \frac{a+(b+c)}{2} = AE = AM\ (ver\ figura)$ y $(p-a) = AD\ (ver\ figura)$.

En definitiva, podemos construir los triángulos rectángulos $ADI\ y\ AEI_a$ y así, de este modo, las circunferencias $C_1 = [I; r]\ (inscrita)\ y\ \ C_2 = [I_a; r_a]\ (exinscrita)$. Tenemos que la recta AE es una tangente común exterior a ambas circunferencias.



Podemos determinar asimismo, la otra tangente común exterior, AM.

Por tanto, A es el centro de homotecia externo de ambas circunferencias.

Como quiera que $[A, I, S, I_a]$ forman una cuaterna armónica, siendo S el centro de homotecia interno, podemos determinar el punto S y a partir de este punto S, las dos tangentes comunes interiores a ambas circunferencias que así determinarán el triángulo ABC y su simétrico AB'C'. (Ver construcción).