Pr. Cabri 811

Sea un triángulo ABC. D es el pie de la altura de A sobre BC. Cualquier recta (Δ) que pase por D corta el círculo circunscrito ABD en el segundo punto E y el círculo circunscrito ACD en el segundo punto F. Determinar el lugar del punto medio de EF cuando (Δ) pivota alrededor de D.
Propuesto por Philippe Fondanaiche

- **Solución**
  por César Beade Franco

Tomemos como vértices del triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0).
Entonces el punto D será (a,0) y una recta genérica de pendiente m tendrá como ecuación y = m(x-a).
Las circunferencias circunscrita a ABD y ACD cuyos diámetros son AB y AC, tienen como ecuaciones respectivas
$-a x + x^2 - b y + y^2 - a x - b y = 0$ y $x^2 + y^2 - (1 + a) x - b y + a = 0$
que cortan e la recta en M($\frac{b m + a m^2}{1+m^2}$, $\frac{m(-a+b m)}{1+m^2}$) y N($\frac{1+b m+a m^2}{1+m^2}$, $\frac{m(1-a+b m)}{1+m^2}$).
Su punto medio será F($\frac{1+2 b m+2 a m^2}{2+2 m^2}$, $\frac{m(1-2 a+2 b m)}{2(1+m^2)}$)
que puede considerarse la ecuación paramétrica del lugar buscado. Y eliminando m obtenemos
$x^2 + y^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right) x - b y + \frac{a}{2} = 0$, ecuación de una circunferencia de diámetro la mediana desde A.