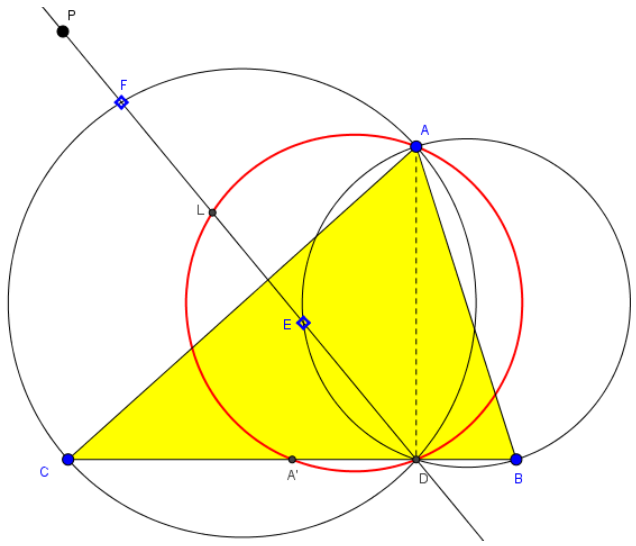
**Problema 811.-**
Sea un triángulo ABC. D es el pie de la altura de A sobre BC. Cualquier recta (Δ) que pase por D corta el círculo circunscrito ABD en el segundo punto E y el círculo circunscrito ACD en el segundo punto F. Determinar el lugar del punto medio de EF cuando (Δ) pivota alrededor de D.

*Fondanaiche, P. (2017) Comunicación personal.*

**Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.**
*Respuesta*: El lugar del punto medio de EF cuando (Δ) pivota alrededor de D es la circunferencia que circunscribe al triángulo rectángulo ADA', siendo A', punto medio de BC. Observamos este hecho a partir de la pertenencia a dicho lugar de los vértices del propio triángulo ADA'.




Estableciendo el siguiente sistema de coordenadas $\{EjeOX = BC, EjeOY = AD, F = (0,0)\}$.
En este sistema, los vértices de nuestro triángulo serán $B(m,0), A(0,1), C = (-n,0), siendo\ m,n > 0$.
Por tanto, la circunferencia $C_1$ que circunscribe al triángulo rectángulo ABD tendrá de ecuación:
$C_1 \equiv \left(x-\frac{m}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{m^2+1}{4}$
Asimismo, la circunferencia $C_2$que circunscribe al triángulo rectángulo ACD tendrá de ecuación:
$C_2 \equiv \left(x+\frac{n}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n^2+1}{4}$

Una recta variable que pase por el origen de coordenadas $D(0,0)$ tendrá de ecuación $y = ax,\ \ a \in R$.
Hallamos entonces los puntos E y F, respectivamente:
$E = (\frac{a+m}{1+a^2}, \frac{a(a+m)}{1+a^2}) \quad F = (\frac{a-n}{1+a^2}, \frac{a(a-n)}{1+a^2})$
Luego el punto medio L de EF tendrá de coordenadas,

$$L = (\frac{2a+m-n}{2(1+a^2)}, \frac{a(a+m)+a(a-n)}{2(1+a^2)})$$

Vamos a probar que este punto pertenece a la circunferencia C circunscrita al triángulo rectángulo ADA', siendo $A'(\frac{m-n}{2}, 0)$, punto medio de BC.

$$C \equiv \left(x - \frac{m-n}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+1}{4}$$

Para ello, sustituimos en esta ecuación las coordenadas del punto L.

$$\left(\frac{2a+m-n}{2(1+a^2)} - \frac{m-n}{4}\right)^2 + \left(\frac{a(a+m)+a(a-n)}{2(1+a^2)} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}((m-n)^2+4)$$

En definitiva,

$$\left(\frac{2a+m-n}{2(1+a^2)} - \frac{m-n}{4}\right)^2 + \left(\frac{a(a+m)+a(a-n)}{2(1+a^2)} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(\frac{m-n}{2})^2+1}{4}, \qquad cqd \quad \blacksquare$$