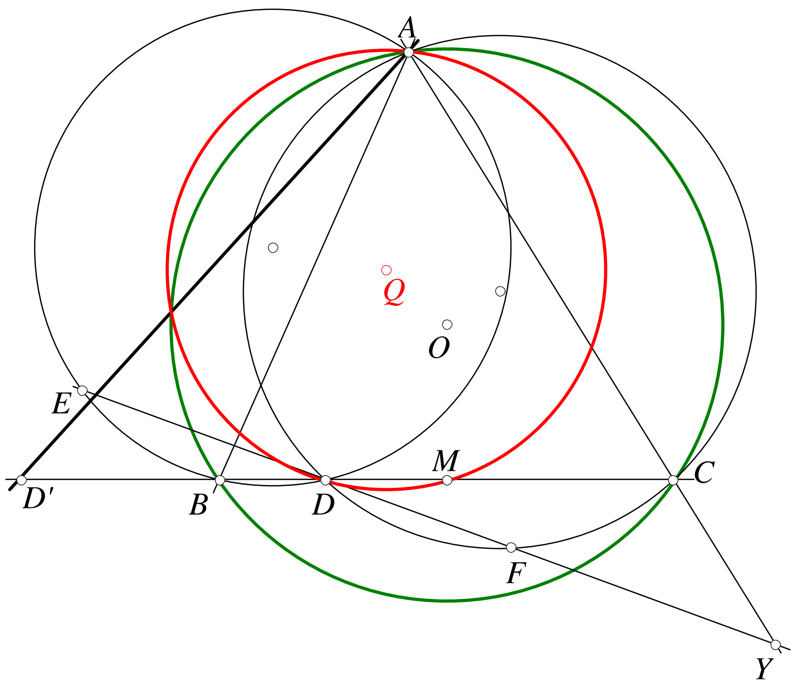
Problema 811 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo ABC. D es el pie de la altura de A sobre BC. Cualquier recta Δ que pase por D corta el círculo circunscrito ABD en el segundo punto E y el círculo circunscrito ACD en el segundo punto F. Determinar el lugar del punto medio de EF cuando Δ pivota alrededor de D.*

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Solución por Francisco Javier García Capitán. Supondremos en general que $D = (0 : v : w)$ es cualquier punto sobre BC. Consideramos un punto variable $Y = (t : 0 : 1 - t)$ sobre la recta CA y calculamos las segundas intersecciones de la recta $\Delta = YD$ con las circunferencias ABD y ACD.



Obtenemos los puntos

$$\begin{aligned} E =&(t(c^2tv^2 - a^2vw - a^2tvw + b^2tvw + c^2tvw + b^2tw^2)\\ &:v(a^2v + a^2tv - b^2tv - b^2tw) : c^2tv(v + w)),\\ F =&(t(a^2v^2 + c^2tv^2 - a^2tvw + b^2tvw + c^2tvw + b^2tw^2)\\ &: - b^2tv(v + w) : v(a^2v + c^2tv - a^2tw + c^2tw)). \end{aligned}$$

El punto medio de EF es

$$\begin{aligned} &(t(a^2v^2 + 2c^2tv^2 - a^2vw - 2a^2tvw + 2b^2tvw + 2c^2tvw + 2b^2tw^2)\\ &:v(a^2v + a^2tv - 2b^2tv - 2b^2tw) : v(a^2v + 2c^2tv - a^2tw + 2c^2tw)), \end{aligned}$$

y este punto describe la cónica

$$2(v + w)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) - a^2(x + y + z)(wy + vz) = 0, \tag{1}$$

una circunferencia, ya que es homotética a la circunferencia circunscrita $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Además, podemos comprobar que pasa por los puntos A y D, y también por el punto medio M del lado BC.

Por construcción, el lugar geométrico de la circunferencia ADM será la mediatriz de la mediana AM.

Además en (1) vemos que la recta $wy + vz = 0$, es decir la recta AD' conjugada armónica de AD, respecto de AB y AC, es el eje radical de la circunferencia ADM y de la circunferencia circunscrita.

Generalización

Podemos generalizar el problema un poco más considerando un punto cualquiera D, no necesariamente sobre la recta BC. Entonces el lugar geométrico del punto medio N de EF será una circunferencia que pasa por A y D, y cuyo eje radical con la circunferencia circunscrita es la recta AD', conjugada armónica de AD respecto de AB y AC.