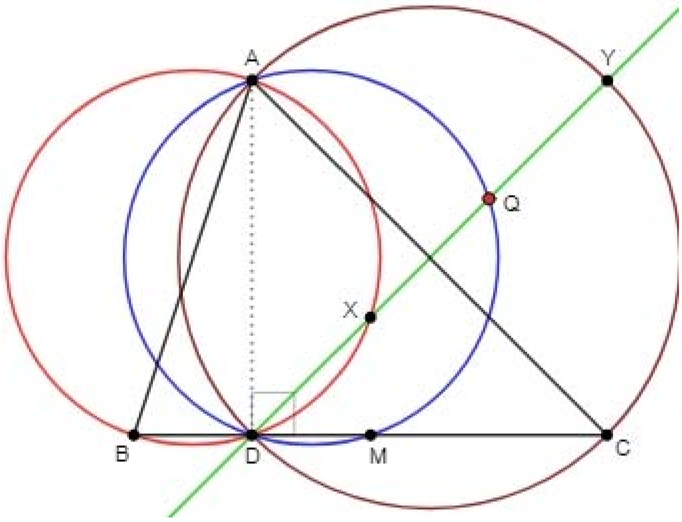
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 811. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un triángulo $ABC,$ se considera el pie D de la altura correspondiente al vértice $BC.$ Cualquier recta Δ que pase por D corta al circuncírculo del triángulo ABD en el segundo punto E y al circuncírculo del triángulo ACD en el segundo punto $F.$ Determinar el lugar geométrico que describe el punto medio Q del segmento EF cuando Δ pivota alrededor de $D.$

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC,$ como su ortocentro es $H=(S_BS_C:S_AS_C:S_AS_B),$ entonces, $D=(0:S_C:S_B)$ por lo que:

$$\Delta \equiv tx+S_By-S_Cz=0\ (t\in\mathbb{R})$$

Además, como:

$$\begin{cases} \odot ABD \equiv 0 = c^2xy+b^2xz+a^2yz-S_Cz(x+y+z) \\ \odot ACD \equiv 0 = c^2xy+b^2xz+a^2yz-S_By(x+y+z) \end{cases}$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} E=(2S_Bt-a^2S_A-b^2S_B-c^2S_C : 2t(S_A-t) : -2c^2t) \\ F=(2S_Ct+a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C : -2b^2t : 2t(S_A+t)) \end{cases}$$

por lo que $Q=(2[(b^2-c^2)t+a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C] : t(a^2-3b^2-c^2+2t) : t(-a^2+b^2+3c^2+2t))$ y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=2[(b^2-c^2)t+a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C]\theta \\ y=t(a^2-3b^2-c^2+2t)\theta \\ z=t(-a^2+b^2+3c^2+2t)\theta \end{cases} \qquad (\theta\in\mathbb{R}^*)$$

obtenemos la ecuación:

$$2(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-(S_By+S_Cz)(x+y+z)=0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

que corresponde a una circunferencia que pasa por el punto A. Además, esta circunferencia corta la recta BC, cuya ecuación es $x = 0$, en el punto D y en el punto medio $M = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC, por lo que es la circunferencia circunscrita al triángulo ADM.