Quincena del 1 al 15 de Marzo de 2017.

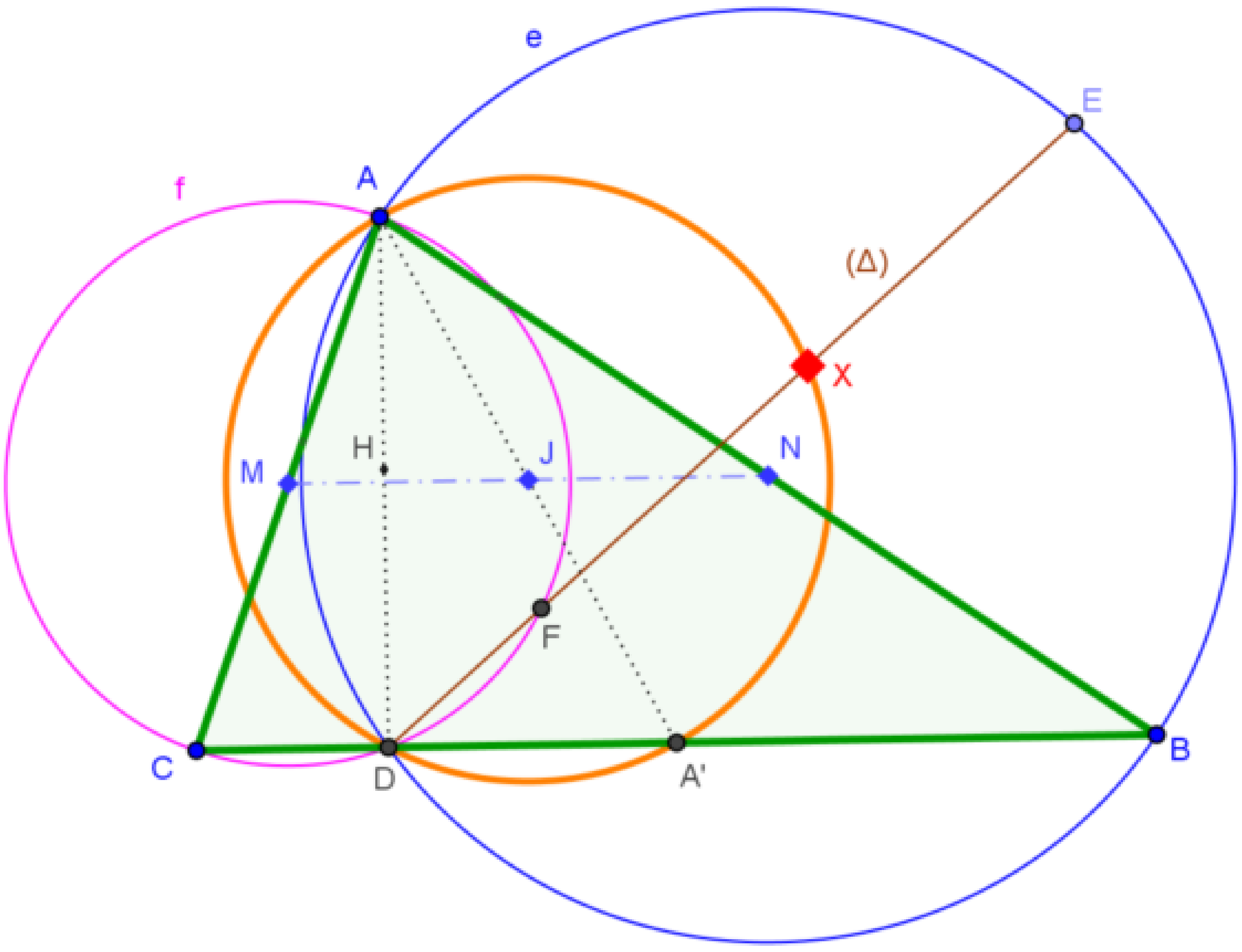
Propuesto por Philippe Fondanaiche

***Problema 811**.- Sea un triángulo ABC. D es el pie de la altura de A sobre BC. Cualquier recta (Δ) que pase por D corta el círculo circunscrito ABD en el segundo punto E y el círculo circunscrito ACD en el segundo punto F.*

Determinar el lugar del punto medio de EF cuando (Δ) pivota alrededor de D.

Fondanaiche, P. (2017) Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea X el punto medio de EF. La potencia de X respecto de $e = (ABD)$ es $p = XD \cdot XE$; respecto de $f = (ACD)$ es $q = XD \cdot XF$. El cociente de estas potencias es -1, pues X equidista de E y F.

La potencia de un punto X arbitrario respecto de una circunferencia de centro M y radio r es $MX^2 - r^2$. Por tanto X es tal que la suma de las potencias de X respecto a las circunferencias e y f es nula. X ha de verificar

$$MX^2 - r^2 + NX^2 - r'^2 = 0,$$

o de forma equivalente, el punto **X es tal que la suma de los cuadrados de las distancias a los centros N y M de (ABD) y (ACD) es constante.**

Es muy sencillo ver que ese lugar geométrico es una circunferencia cuyo centro es el punto medio esos centros. En efecto, tomo unos ejes cartesianos en el que los puntos M y N tengan coordenadas $(-m, 0)$ y $(m, 0)$ respectivamente. Si $X(u, v)$, se ha de verificar

$$(u+m)^2 + v^2 + (u-m)^2 + v^2 = k.$$

Desarrollando se llega a

$$u^2 + v^2 = \frac{k}{2} - m^2,$$

que es una circunferencia de centro el punto medio MN.

En el problema $m = \frac{a}{4}$ y $k = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$, de donde $\frac{k}{2} - m^2 = \frac{b^2+c^2}{8} - \frac{a^2}{16} = \frac{1}{4} \cdot {m_a}^2$

Por tanto el radio de esta circunferencia es la mitad de la mediana de A.

Para concluir, veamos algunos puntos de este lugar a partir de su definición.

Si la recta Δ es la altura AH, entonces los E y F se confunden con A: $X = A$. Cuando Δ es el lado BC, E es el punto B y F el C, por tanto X es el punto medio A' de BC.

Entre los segmentos EF (que pasan por D) hay uno cuyo punto medio es precisamente D.

Sabido ya que el lugar geométrico es una circunferencia vemos pues, que circunscribe al triángulo rectángulo ADA', y por tanto su centro es el punto medio de la mediana de A, sin necesidad de los cálculos anteriores.■