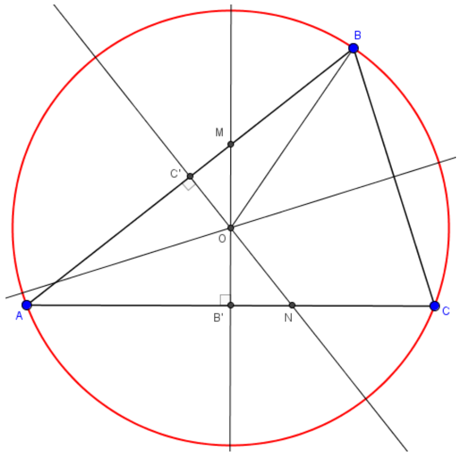
Problema 812.-
Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
Sea K el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BOC, que interseca AB en M y a AC en N.
El punto L es simétrico de K respecto a NM.
Demostrar que AL es perpendicular a BC.

Ronda final de las olimpiadas rusas de 2000. Kazan 14-15 de abril.

http://www.imomath.com/othercomp/Rus/RusMO00.pdf

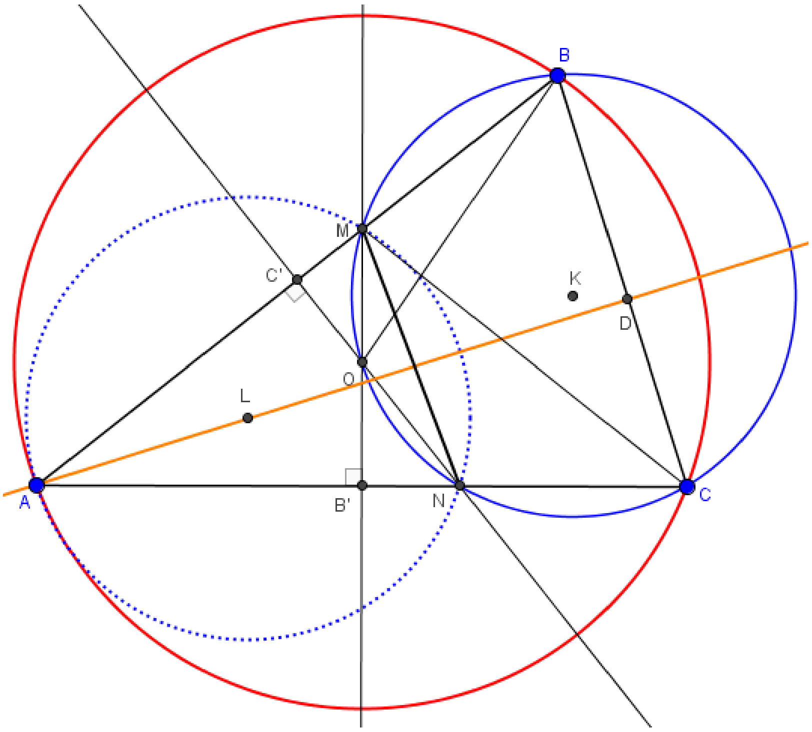
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.
En principio notamos que los puntos M y N son los puntos de intersección de las mediatrices $m_b\ y\ m_c$, sobre los lados $c\ y\ b$, respectivamente. Observamos esto con mayor detalle:



$$\measuredangle ONC = \frac{\pi}{2} + \measuredangle A$$
$(\acute{a}ngulo\ exterior\ al\ tri\acute{a}ngulo\ rect\acute{a}ngulo\ AC'N)$.

$$Como\ \ \measuredangle BOC = 2\measuredangle A, \quad entonces\ \ \measuredangle OBC = \frac{\pi}{2} - \measuredangle A.$$

Por tanto, $\measuredangle ONC + \measuredangle OBC = \frac{\pi}{2} + \measuredangle A + \frac{\pi}{2} - \measuredangle A = \pi$.
De este modo, el cuadrilátero ONBC es inscriptible.
De igual modo, lo será el cuadrilátero OMBC.
Sea pues la construcción considerada en el enunciado.
Observamos que el triángulo AMC es isósceles ya que $\measuredangle A = \measuredangle MAC = \measuredangle MCA$.



Por tanto, la circunferencia circunscrita al triángulo MNA, tendrá como centro al punto L, punto simétrico de K respecto del segmento MN, ya que ambas circunferencias son arco-capaz del mismo ángulo $\measuredangle A$ y del mismo segmento MN.
Consideramos el triángulo ABD, siendo D el punto de intersección de la recta AL sobre el lado BC.
En este triángulo, tenemos que $\measuredangle ABD = \measuredangle B$. Por tanto,
$\measuredangle MNC = \pi - \measuredangle B \rightarrow \measuredangle MNA = \measuredangle B$.
Como quiera que
$\measuredangle MNA = \measuredangle B \rightarrow \measuredangle LAM = \frac{\pi}{2} - \measuredangle B$.
Es decir, $\measuredangle DAB = \frac{\pi}{2} - \measuredangle B$.
En definitiva, $\measuredangle ADB = \frac{\pi}{2}$.

$$Así\ tenemos\ que\ \ AL\ es\ perpendicular\ a\ BC, \qquad cqd \quad \blacksquare$$