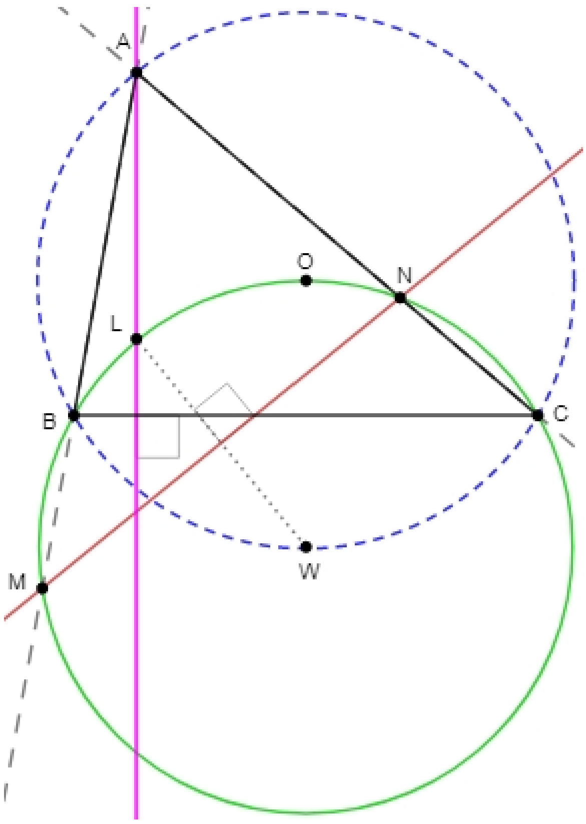
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 812. (Ronda final de las olimpiadas rusas de 2000, Kazan 14-15 de abril) Dado un triángulo ABC con circuncentro O, la circunferencia circunscrita al triángulo BOC, cuyo centro llamaremos W, interseca a la recta AB en el punto M y a la recta AC en el punto N. Si L es el punto simétrico de W con respecto a la recta MN, demostrar que $AL \perp BC$.

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $O=(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo BOC es:

$$2S_A(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-b^2c^2x(x+y+z)=0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$W=(a^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2) : -b^2(a^4+b^4-2a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2) : -c^2(a^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-2a^2c^2))$$

y sus puntos de intersección con las rectas AB y AC:

$$\begin{cases} M=AB\cap \odot BOC=(c^2-a^2 : b^2 : 0) \\ N=AC\cap \odot BOC=(b^2-a^2 : 0 : c^2) \end{cases} \Rightarrow MN \equiv b^2c^2x+c^2(a^2-c^2)y+b^2(a^2-b^2)z=0$$

por lo que $L=(a^4(a^2-3b^2-3c^2)+b^4(3a^2-b^2+c^2)+c^4(3a^2+b^2-c^2))$, siendo:

$$\begin{cases} AL_\infty=(a^2 : -S_C : -S_B) \\ BC_\infty=(0 : 1 : -1) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

luego:

$$AL_{\infty} \cdot BC_{\infty} = -S_B S_C + S_C S_B = 0$$

y, por tanto, $AL \perp BC$.