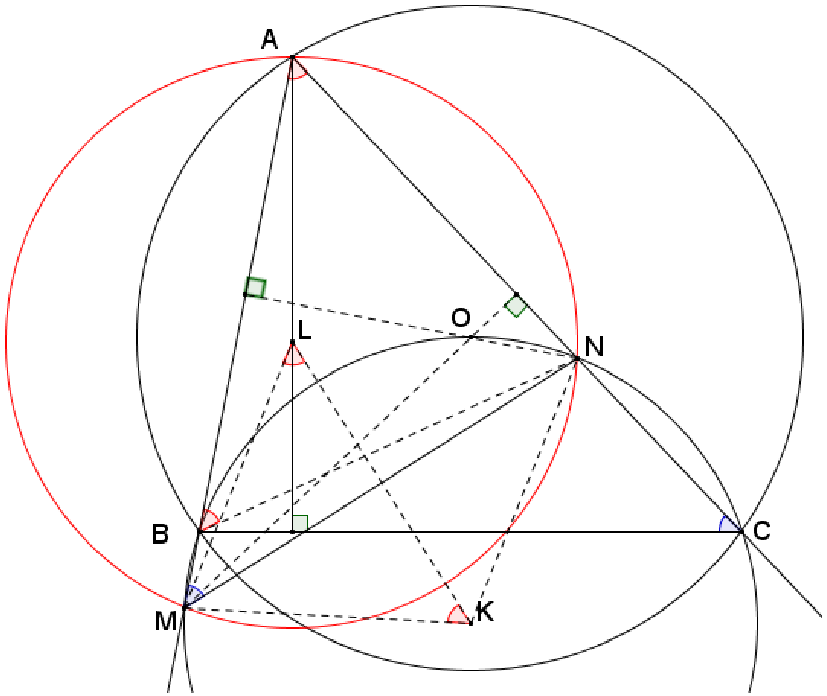
Problema n° 812

3.- Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sea K el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BOC, que interseca AB en M y a AC en N. El punto L es simétrico de K respecto a NM. Demostrar que AL es perpendicular a BC.

Ronda final de las olimpiadas rusas de 2000. Kazan 14-15 de abril.

http://www.imomath.com/othercomp/Rus/RusMO00.pdf

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme n°1: le triangle ANB est isocèle de sommet N

Dans le triangle ABC, on a la relation d'angles: $\angle$BOC = 2$\angle$BAC.

Le quadrilatère OBNC étant inscrit dans le cercle circonscrit au triangle BOC, on a les relations d'angles

ONB = $\angle$OCB = (180° – $\angle$BOC) / 2 = 90° – $\angle$BAC et $\angle$ONA = $\angle$OBC.

D'où $\angle$ONA + $\angle$ BAC = 90°.

La droite NO est donc perpendiculaire à AB, ce qui entraine NA = NB. Cqfd.

Lemme n°2: L est le centre du cercle circonscrit au triangle AMN.

L étant symétrique de K par rapport à MN, on a $\angle$MLK = $\angle$MKL = $\angle$MKN/2

Or $\angle$ABN = 180° – $\angle$MBN = 180° – (180° –$\angle$MKN/2) = $\angle$MKN/2.

D'où $\angle$ABN = $\angle$BAN = $\angle$MLK = $\angle$MLN/2. Cqfd.

D'après le lemme n°2, il en résulte que:

$\angle$CAL = $\angle$NAL = (180° – $\angle$ALN)/2 = 90° – $\angle$AMN

Comme $\angle$AMN = $\angle$BMN = $\angle$BCN, on en déduit $\angle$CAL + $\angle$BCN = 90°

Conclusion: AL est perpendiculaire à BC.

Nota: le point O est l'orthocentre au triangle AMN et L est l'orthocentre du triangle ABC.