Quincena del 1 al 15 de Marzo de 2017.

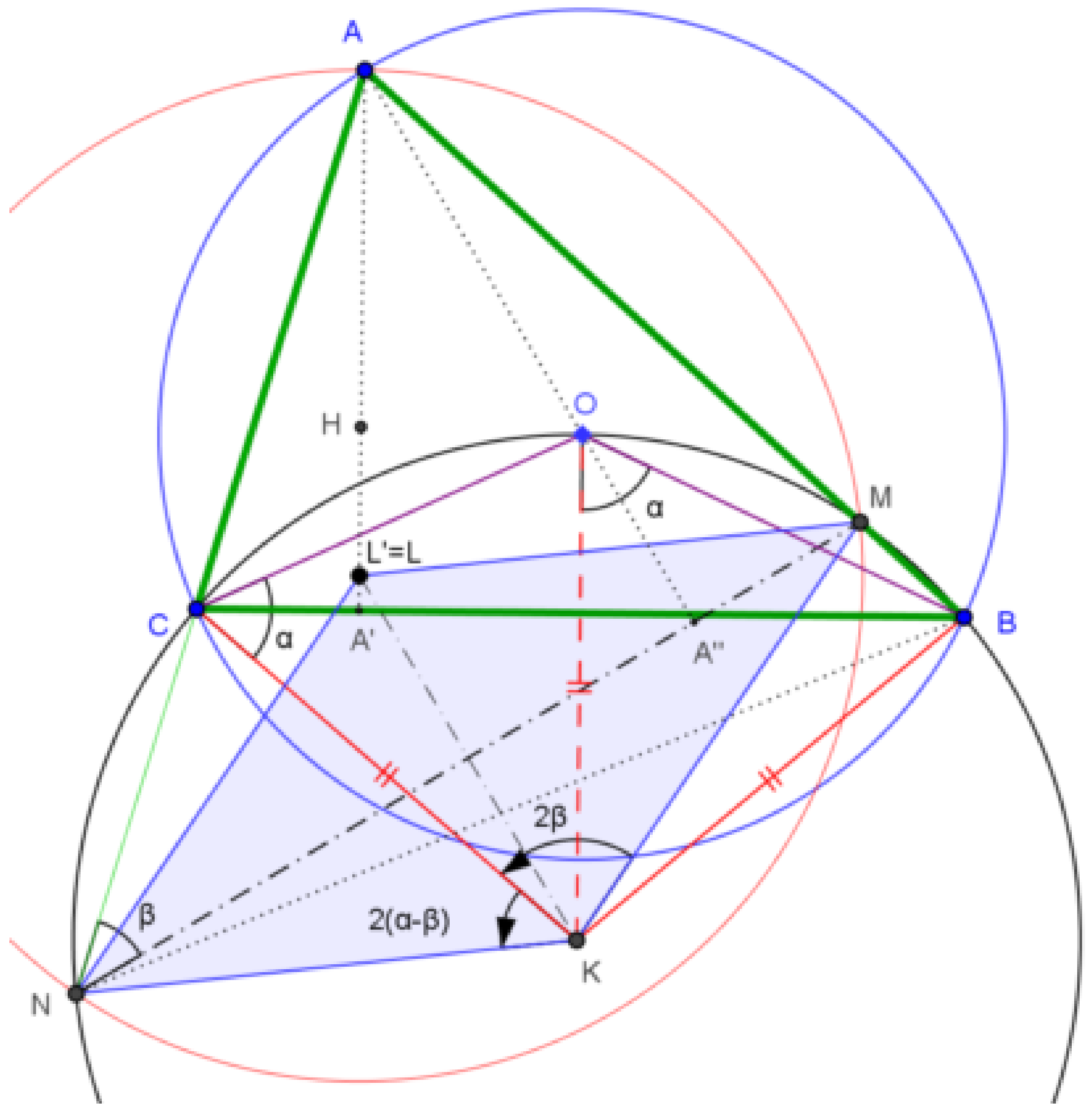
***Problema* 812**

3.- *Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sea K el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BOC, que interseca AB en M y a AC en N. El punto L es simétrico de K respecto a NM. Demostrar que AL es perpendicular a BC.*

Ronda final de las olimpiadas rusas de 2000. Kazan 14-15 de abril.

http://www.imomath.com/othercomp/Rus/RusMO00.pdf

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sean α, β, γ los ángulos en los vértices A, B y C del triángulo ABC y R el radio de su circunferencia circunscrita.

Es evidente que el cuadrilátero $LMKN$ es un rombo. Por las propiedades de la potencia de A respecto de la circunferencia (BOC) los triángulos ABC y ANM son semejantes.

También **son semejantes los triángulos BOC y NKM.**

Al ser dos triángulos isósceles, demostraremos que el ángulo desigual es el mismo en ambos. Aprovecharemos este hecho para calcular el valor de las diagonales del rombo $LMKN$.

El ángulo $\measuredangle CKM$ es 2β pues abarca el mismo arco que el ángulo $\measuredangle CNM = \beta$.

El ángulo $\measuredangle CKB = 360 - 4\alpha$ (reunión de dos iguales), abarca el arco CB y por tanto en el triángulo BCN, $\measuredangle CNB = 180 - 2\alpha$ y a partir de él, $\measuredangle CBN = \alpha - \beta$. El ángulo central $\measuredangle CKN = 2(\alpha - \beta)$ pues abarca el mismo arco que el anterior. Sumando ángulos tenemos $\measuredangle MKN = 2\beta + 2(\alpha - \beta) = 2\alpha$.

Y con esto queda probada la semejanza.

El radio R' de la circunferencia (BOC) se calcula fácilmente a partir del triángulo BOC inscrito en ella, resultando $R' = \frac{R}{2 \cdot \cos\alpha}$, por tanto la razón de semejanza entre los triángulos ABC y ANM es $\frac{1}{2 \cdot \cos\alpha}$ y con ello obtenemos $MN = \frac{a}{2 \cdot \cos\alpha}$. Ahora calculamos fácilmente la otra diagonal: $KL = 2 \cdot MK \cdot \cos\alpha = R$.

Las rectas AO y AH son conjugadas isogonales, lo que implica que AO es perpendicular a MN. Como $\measuredangle ONA = \frac{1}{2} \measuredangle OKC$ también NO es perpendicular a AM, esto es, el circuncentro de ABC es el ortocentro de ANM.

Sea L' el punto de encuentro del la diagonal KL y la altura AH. El cuadrilátero $AL'KO$ es un paralelogramo, pues AL' y OK son perpendiculares a BC; asimismo AO y $L'K$ lo son a MN, por tanto, $KL' = AO = R$. Pero $KL = R$, con lo cual $L = L'$. **Y con esto podríamos concluir.**

El segmento AL es igual al radio R' de (BOC), es decir, $AL = OK = MK = LN = LM$, resulta que L es el centro de la circunferencia (AMN), de igual radio que (BOC).

El triángulo ALN es isósceles, el ángulo desigual mide 2γ, por abarcar el mismo arco que AMN; los ángulos iguales miden $90 - \gamma$. ■