Problema 813

Construïu el triangle coneguts r_b , r_c , $b+c$.

r_b , r_c radis de les circumferències exinscrites als angles B i C.

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solució:

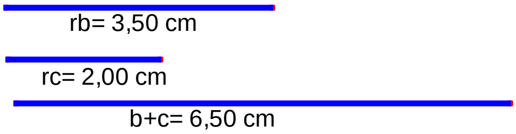
Suposarem que $b \geq c$, aleshores, $r_b \geq r_c$

Siga T_1 punt de tangència de la circumferència exinscrita a l'angle C i el costat $\overline{BC}$.

Siga T_2 punt de tangència de la circumferència exinscrita a l'angle B i el costat $\overline{BC}$.

$\overline{T_1T_2} = b+c$.

Procés de construcció:



1.- Dibuixar la semirecta $\overline{T_1T_1} = b+c$

2.- Dibuixar la circumferència tangent en T_1 a la semirecta, de radi r_c .

3.- Dibuixar la circumferència tangent en T_2 a la semirecta, de radi r_b .

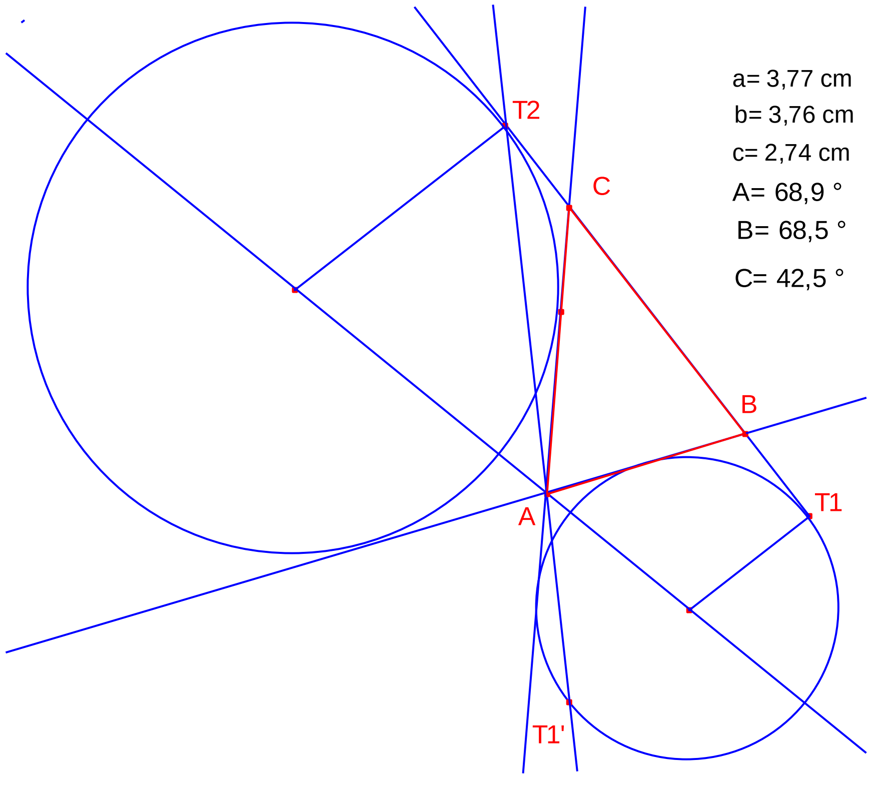
4.- Dibuixar la recta $\overline{I_bI_c}$.

5.- Dibuixar la recta $\overline{T_1'T_2}$.

6.- La intersecció de les rectes $\overline{I_bI_c}$, $\overline{T_1'T_2}$ és el vèrtex A.

7.- Dibuixem les rectes tangents interiors a les dues circumferències que ens donen els costats del triangle.

8.- Dibuixar el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Resolució analítica, per al cas $r_b = \frac{7}{2}$, $r_c = 2$, $b + c = \frac{13}{2}$.

$$\frac{r_b}{r_c} = \frac{a+b-c}{a-b+c}.$$

Siga $d = b - c$.

$$\frac{7}{4} = \frac{a+d}{a-d}.$$

Aplicant l'àrea del triangle:

$$(p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\frac{a+d}{2}2 = \sqrt{\frac{a+\frac{13}{2}}{2}\,\frac{-a+\frac{13}{2}}{2}\,\frac{a+d}{2}\,\frac{a-d}{2}}.$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{7}{4} = \frac{a+d}{a-d} \\ a+d = \frac{1}{4}\sqrt{-\left(a+\frac{13}{2}\right)\left(a-\frac{13}{2}\right)(a+d)(a-d)} \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{57}}{2} \\ d = \frac{3\sqrt{57}}{22} \end{cases}.$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} b+c = \frac{13}{2} \\ b-c = \frac{3\sqrt{57}}{22} \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} b = \frac{143+3\sqrt{57}}{44} \\ c = \frac{143-3\sqrt{57}}{44} \end{cases}.$$