Problema 813

Construir el triángulo coneguts r_b , r_c , $b+c$.

r_b , r_c radios de les circumferencias exinscritas a los ángulos B y C.

Sandoamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solución:

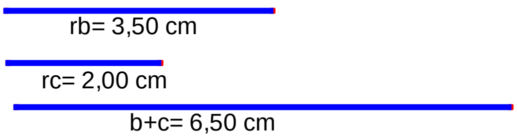
Supondremos que $b \geq c$, entonces, $r_b \geq r_c$

Sea T_1 punto de tangencia de la circunferencia exinscrita a el ángulo C y el lado $\overline{BC}$.

Sea T_2 punto de tangencia de la circunferencia exinscrita a el ángulo B y el lado $\overline{BC}$.

$\overline{T_1T_2} = b+c$.

Proceso de construcción:



1.- Dibujar la semirecta $\overline{T_1T_1} = b+c$

2.- Dibujar la circunferencia tangente en T_1 a la semirecta, de radio r_c .

3.- Dibujar la circunferencia tangente en T_2 a la semirecta, de radio r_b .

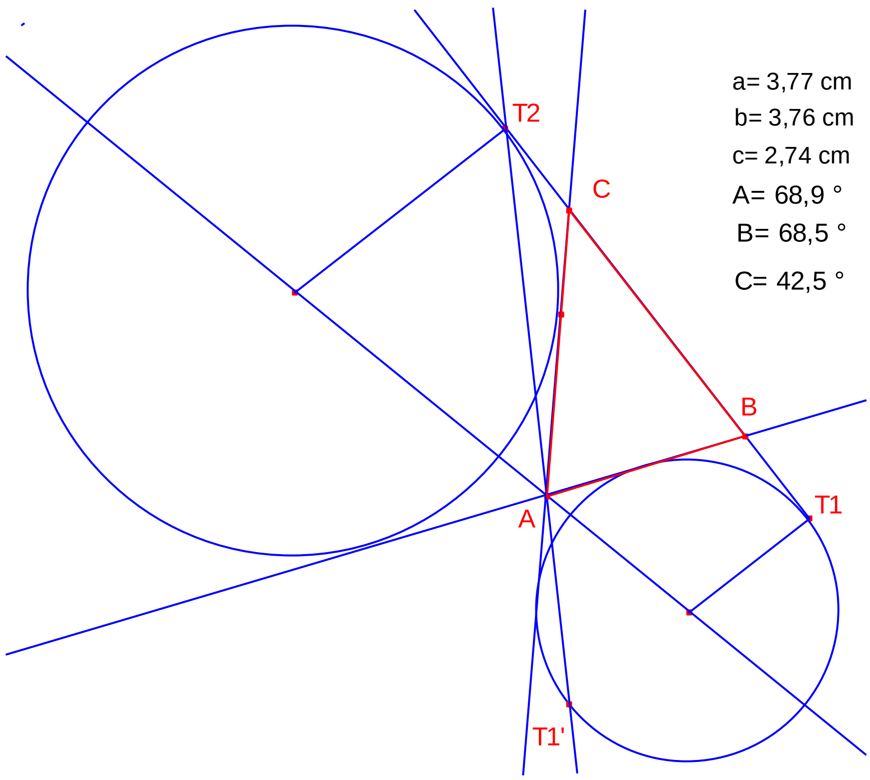
4.- Dibujar la recta $\overline{I_bI_c}$.

5.- Dibujar la recta $\overline{T_1'T_2}$.

6.- La intersección de las rectas $\overline{I_bI_c}$, $\overline{T_1'T_2}$ es el vértice A.

7.- Dibujar las rectas tangentes interiores a las dos circunferencias que nos dan los lados del triángulo.

8.- Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



Resolución analítica, para el caso $r_b = \frac{7}{2}$, $r_c = 2$, $b + c = \frac{13}{2}$.

$$\frac{r_b}{r_c} = \frac{a+b-c}{a-b+c}.$$

Sea $d = b - c$.

$$\frac{7}{4} = \frac{a+d}{a-d}.$$

Aplicando el área del triángulo:

$$(p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\frac{a+d}{2}2 = \sqrt{\frac{a+\frac{13}{2}}{2}\,\frac{-a+\frac{13}{2}}{2}\,\frac{a+d}{2}\,\frac{a-d}{2}}.$$

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{7}{4} = \frac{a+d}{a-d} \\ a+d = \frac{1}{4}\sqrt{-\left(a+\frac{13}{2}\right)\left(a-\frac{13}{2}\right)(a+d)(a-d)} \end{cases}.$$ Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{57}}{2} \\ d = \frac{3\sqrt{57}}{22} \end{cases}.$$

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} b+c = \frac{13}{2} \\ b-c = \frac{3\sqrt{57}}{22} \end{cases}.$$ Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} b = \frac{143+3\sqrt{57}}{44} \\ c = \frac{143-3\sqrt{57}}{44} \end{cases}.$$