Problema 814

Construïu el triangle coneguts r_b , r_c , $b-c$.

r_b , r_c radis de les circumferències exinscrites als angles B i C.

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solució:

$r_b = \dfrac{pr}{p-b}$, $r_c = \dfrac{rp}{p-c}$. Dividint ambdues expressions:

$\dfrac{r_b}{p-c} = \dfrac{r_c}{p-b}$, aleshores:

$\dfrac{r_b - r_c}{b-c} = \dfrac{r_b + r_c}{a}$.

Aleshores, és pot construir a, com quart proporcional.

$p-b = \dfrac{a-b+c}{2} = \dfrac{a-(b-c)}{2}$, $p-c = \dfrac{a+(b-c)}{2}$.

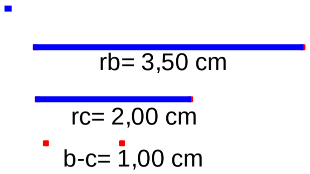
Siga T_c punt de tangència de la circumferència exinscrita a l'angle C i el costat $\overline{AB}$.

$\overline{AT_c} = p-b$.

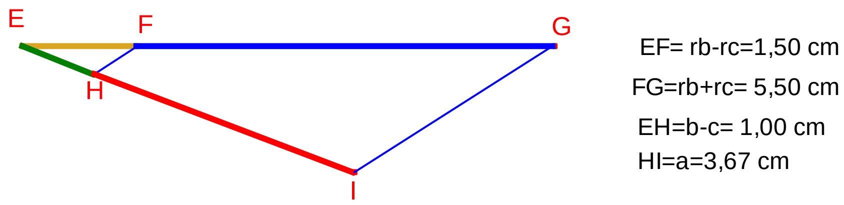
Siga T_B punt de tangència de la circumferència exinscrita a l'angle B i el costat $\overline{AB}$.

$\overline{AT_b} = p-c$.

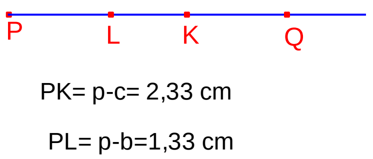
Procés de construcció:



1.- Construir a, quart proporcional:



2.- Construir $p-b$, $p-c$.



3.- Dibuixar la semirecta d'origen A.

4.- Dibuixar $\overline{AT_c} = p-b$.

5.- Dibuixar la circumferència tangent en T_c a la semirecta, de radi r_c .

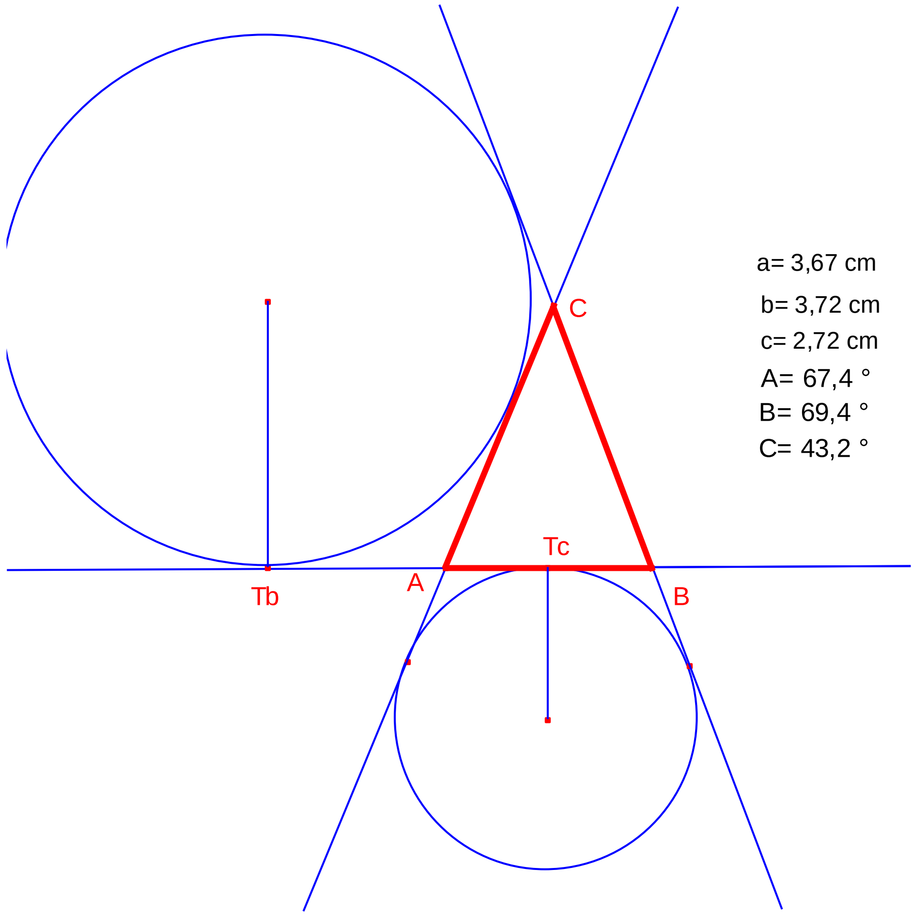
6.- Dibuixar la recta tangent a la circumferència que passa per A.

7.- Dibuixar $\overline{AT_b} = p - c$.

8.- Dibuixar la circumferència tangent en T_b a la prolongació de la semirecta, de radi r_b .

9.- Dibuixar la recta AB tangent exterior a les dues circumferències .

10.- Dibuixar el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Resolució analítica, per al cas

Siguen $r_b = \dfrac{7}{2}$, $r_c = 2$, $b - c = 1$.

$\dfrac{r_b - r_c}{b - c} = \dfrac{r_b + r_c}{a}$, $\dfrac{\frac{7}{2} - 2}{1} = \dfrac{\frac{7}{2} + 2}{a}$. Aleshores, $a = \dfrac{11}{3}$.

Aplicant l'àrea del triangle:

$p - b = \dfrac{a - (b - c)}{2} = \dfrac{4}{3}$, $p - c = \dfrac{a + b - c}{2} = \dfrac{7}{3}$.

$(p - c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$\dfrac{7}{3} \cdot 2 = \sqrt{p\left(p - \dfrac{11}{3}\right)\dfrac{4}{3}\dfrac{7}{3}}$. Resolent l'equació:

$p = \dfrac{11+\sqrt{373}}{6}$.

$b + c = 2\dfrac{11+\sqrt{373}}{6} - \dfrac{11}{3} = \dfrac{\sqrt{373}}{3}$.

$\begin{cases} b - c = 1 \\ b + c = \dfrac{\sqrt{373}}{3} \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} b = \dfrac{3+\sqrt{373}}{6} \\ c = \dfrac{-3+\sqrt{373}}{6} \end{cases}$.