Problema 814

Construir el triángulo conocidos r_b, r_c, $b-c$.

r_b, r_c radios de las circunferencias exinscritas als ángulos B y C.

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:

$r_b=\dfrac{pr}{p-b}$, $r_c=\dfrac{rp}{p-c}$. Dividint ambdues expressions:

$\dfrac{r_b}{p-c}=\dfrac{r_c}{p-b}$, entonces:

$\dfrac{r_b-r_c}{b-c}=\dfrac{r_b+r_c}{a}$.

Entonces, se puede construir a, como cuarto proporcional.

$p-b=\dfrac{a-b+c}{2}=\dfrac{a-(b-c)}{2}$, $p-c=\dfrac{a+(b-c)}{2}$.

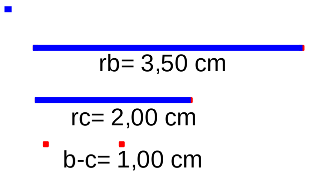
Sea T_c punto de tangencia de la circunferencia exinscrita el ángulo C y el lado $\overline{AB}$.

$\overline{AT_c}=p-b$.

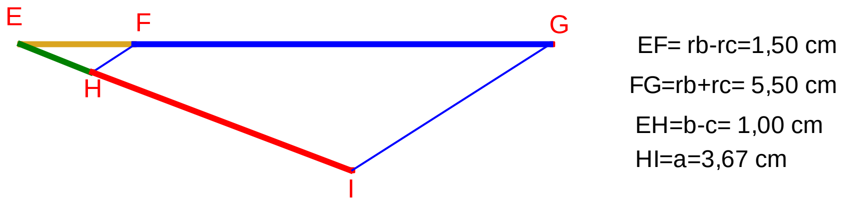
Sea T_B punto de tangencia de la circunferencia exinscrita al ángulo B y el lado $\overline{AB}$.

$\overline{AT_b}=p-c$.

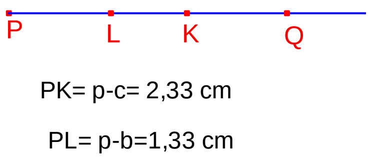
Procés de construcció:



1.- Construir a, cuarto proporcional:



2.- Construir $p-b$, $p-c$.



3.- Dibujar la semirecta d'origen A.

4.- Dibujar $\overline{AT_c}=p-b$.

5.- Dibujar la circunferencia tangente en T_c a la semirecta, de radio r_c .

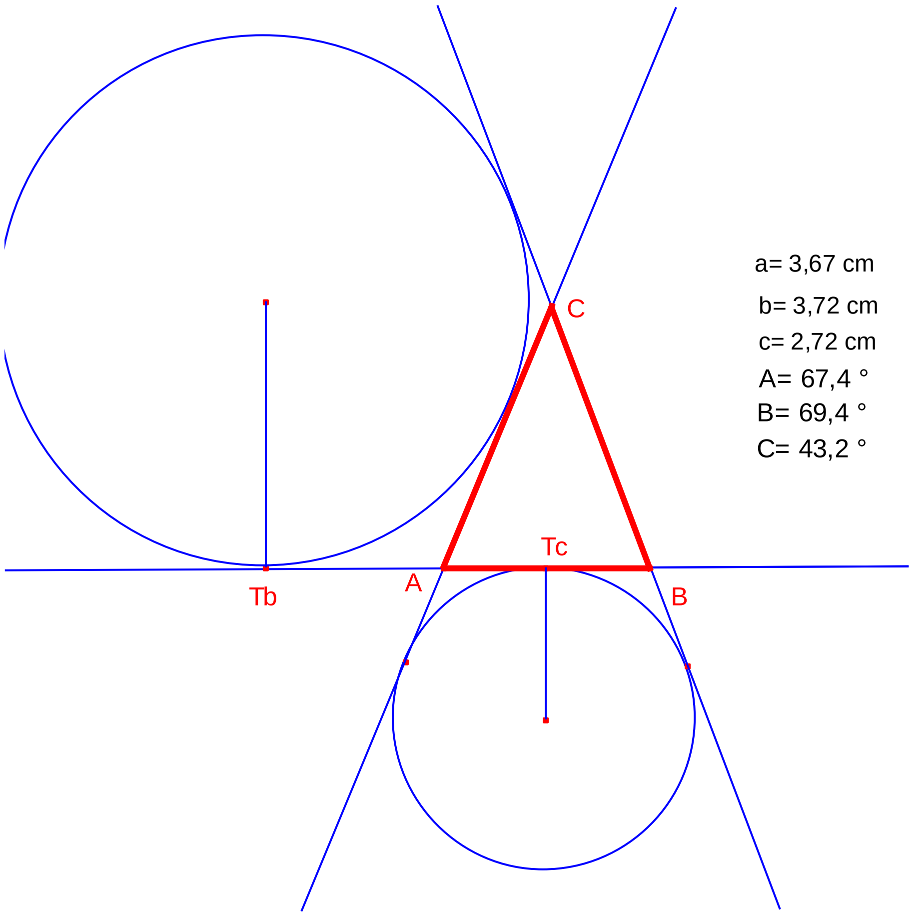
6.- Dibujar la recta tangente a la circunferencia que pssa por A.

7.- Dibujar $\overline{AT_b} = p - c$.

8.- Dibujar la circunferencia tangente en T_b a la prolongación de la semirecta, de radio r_b .

9.- Dibujar la recta AB tangente exterior a las dos circunferencias .

10.- Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$



Resolución analítica, para al caso $r_b = \frac{7}{2}$, $r_c = 2$, $b - c = 1$.

$\frac{r_b - r_c}{b - c} = \frac{r_b + r_c}{a}$, $\frac{\frac{7}{2} - 2}{1} = \frac{\frac{7}{2} + 2}{a}$. Entonces, $a = \frac{11}{3}$.

Aplicando el área al triángulo:

$p - b = \frac{a - (b - c)}{2} = \frac{4}{3}$, $p - c = \frac{a + b - c}{2} = \frac{7}{3}$.

$(p - c)r_c = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

$\frac{7}{3} \cdot 2 = \sqrt{p\left(p - \frac{11}{3}\right)\frac{4}{3}\frac{7}{3}}$. Resoviendo la ecuación:

$$p=\frac{11+\sqrt{373}}{6}.$$

$$b+c=2\frac{11+\sqrt{373}}{6}-\frac{11}{3}=\frac{\sqrt{373}}{3}.$$

$\begin{cases} b-c=1 \\ b+c=\dfrac{\sqrt{373}}{3} \end{cases}$. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} b=\dfrac{3+\sqrt{373}}{6} \\ c=\dfrac{-3+\sqrt{373}}{6} \end{cases}.$$