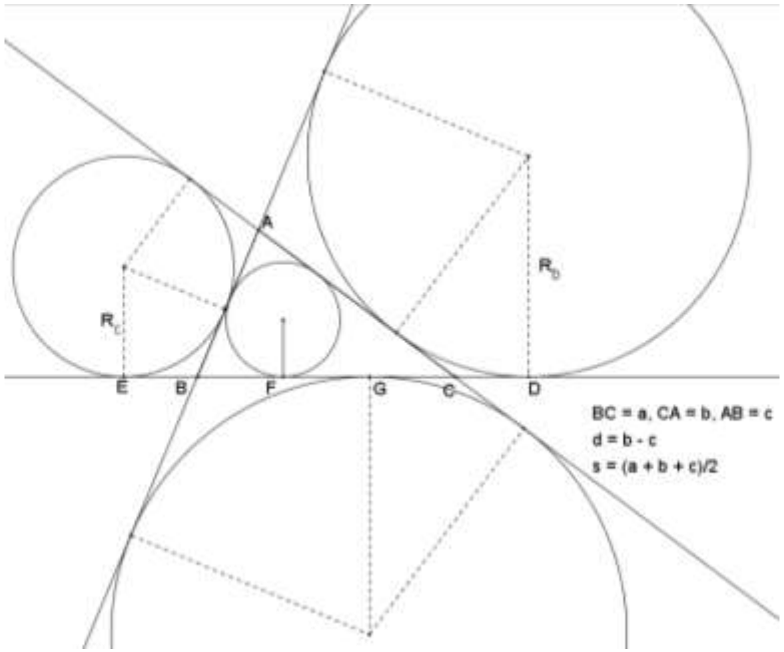
Problema n°814

Construir el triángulo cuyos datos son R_b, R_c, (b-c). (R_b y R_c los radios de la exinscritas de los ángulos B y C)

Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit un triangle dont les côtés ont pour longueurs BC = a, CA = b et AB = c

On suppose sans perte de généralité que b > c et l'on pose b – c = d.

Le demi-périmètre est s = (a + b + c)/2 = (a + 2c + d)/2.

D'où s – a = (d + 2c – a)/2, s – b = (a – d)/2 et s – c = (a + d)/2

Les rayons R_b et R_c des cercles exinscrits contenus dans les secteurs angulaires de B et de C s'expriment à partir de a,b,c,d et s selon les formules* bien connues:

$R_b = \sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$ et $R_c = \sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$

Il en résulte $\dfrac{R_b}{R_c} = \dfrac{s-c}{s-b} = \dfrac{a+d}{a-d}$

D'où $a = \dfrac{d(R_b^2+R_c^2)}{R_b^2-R_c^2}$

puis $R_b^2 = \dfrac{[(d+2c)^2-a^2](a+d)}{4(a-d)}$ qui donne le côté c en fonction de a, d et R_b selon la formule $c = \dfrac{\sqrt{\dfrac{4R_b^2(a-d)}{a+d}+a^2}-d}{2}$. d'où b = d + c.

Connaissant les longueurs R_b, R_c et d = b – c, on sait donc construire à la règle et au compas les longueurs a, b et c.