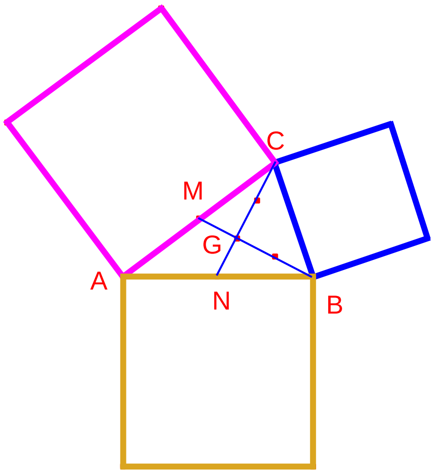
Problema 815.

Hi havia una vegada un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les mitjanes $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ del qual eren perpendiculars.
Cadascun dels tres costats eren també costat d'un quadrat exterior al triangle. Aquests quadrats estaven acolorits respectivament, de blau, rosa i groc, depenent de si la seua base era $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ o $\overline{AB}$. Quants quadrats blaus calen per obtenir una superfície igual a la dels quadrats rosa i groc junts?.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:
Siga G el baricentre del triangle.



Les mesures de les mitjanes del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són:

$$\overline{BM}^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}, \quad \overline{CN}^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{BG}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \overline{BM}^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}.$$

$$\overline{GN} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \overline{CN}^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$

Per hipòtesi el triangle $\overset{\Delta}{BGN}$ és rectangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GN}^2:$$

$$\frac{1}{4}c^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$ Simplificant:

$$5a^2 = b^2 + c^2.$$

Aleshores, 5 quadrats blaus és igual a la suma dels quadrats rosa i groc.