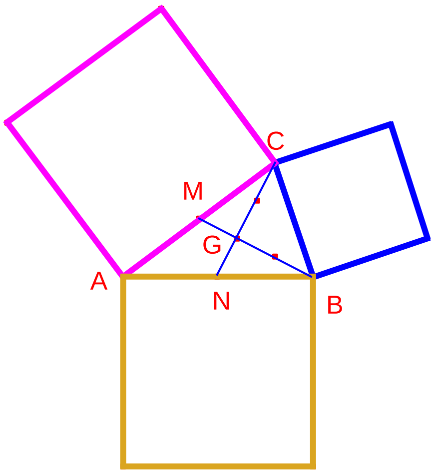
Problema 815.
14.- Medianas multicolores

Érase una vez un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuyas medianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ eran perpendiculares. Cada uno de sus tres lados era también el lado de un cuadrado exterior al triángulo. Estos cuadrados estaban coloreados respectivamente, de azul, rosa y amarillo, dependiendo de si su base era $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ o $\overline{AB}$. ¿Cuántos cuadrados azules se necesitarán para obtener una superficie igual a la de los cuadrados rosa y amarillo juntos?
Tu turno:
Berrondo- Agrell, M. (2006): 100 enigmas de geometría (pag. 100)

Solución de Ricard Peiró i Estruch:
Sea G el baricentro del triángulo.



Les medidas de las medianas del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son:

$$\overline{BM}^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4},\quad \overline{CN}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{BG}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\overline{BM}^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}.$$

$$\overline{GN}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\overline{CN}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$

Por hipótesis el triángulo $\overset{\Delta}{BGN}$ es rectángulo.
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2c^2=\overline{BG}^2+\overline{GN}^2:$$

$$\frac{1}{4}c^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$ Simplificando:

$$5a^2=b^2+c^2.$$

Entonces, el área de 5 cuadrados azules es igual a la suma de las áreas de los cuadrados rosa y amarillo.