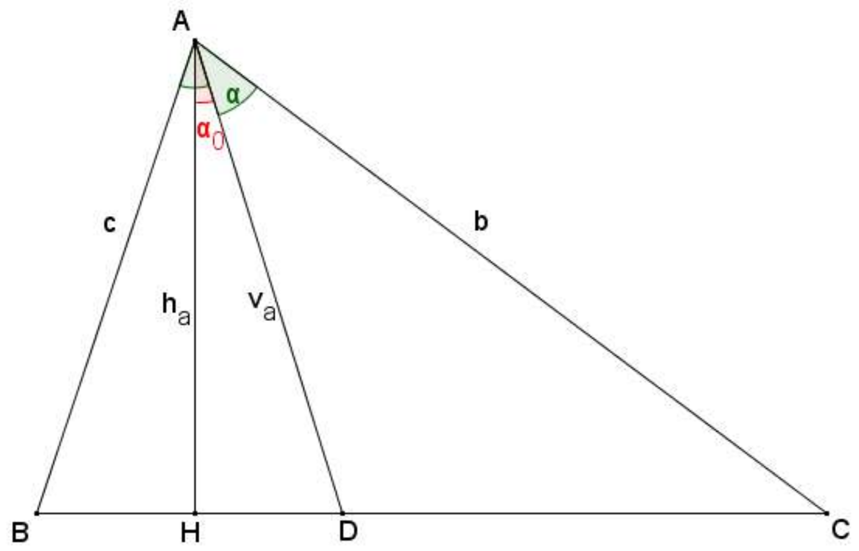
Problema n° 817
Construir el triángulo cuyos datos son h_a,v_a , b – c. (v_a es la bisectriz interna del ángulo A)
Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



AD et AH sont respectivement la bissectrice et la hauteur issues de A dans le triangle ABC.
On pose AB =c, AC = b avec AC > AB. D'où r = AH/(AC – AB) = h_a /(b – c) qui est donné par hypothèse.
On désigne par $\alpha = \angle BAD = \angle CAD$ et $\alpha_0 = \angle HAD$. Comme h_a et v_a sont donnés, on déduit l'angle α_0 tel que $\cos(\alpha_0) = h_a/v_a$
On a les relations :
$AB = c = h_a/\cos(\alpha - \alpha_0)$ et $AC = b = h_a/\cos(\alpha + \alpha_0)$
D'où $(b - c)/h_a = 1/r = 1/\cos(\alpha + \alpha_0) - 1/\cos(\alpha - \alpha_0)$ qui aboutit à l'équation du second degré dont l'inconnue est $x = \sin(\alpha)$:
$x^2 + 2r.\sin(\alpha_0).x - \cos^2(\alpha_0) = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = r^2.\sin^2(\alpha_0) + \cos^2(\alpha_0)$.
On obtient la solution unique $x = \sin(\alpha) = -r.\sin(\alpha_0) + \sqrt{\Delta}$ et $\alpha = \mathrm{Arcsin}(-r.\sin(\alpha_0) + \sqrt{\Delta})$
La construction du triangle ABC peut donc être faite à la règle et au compas:
On trace le point H quelconque sur l'axe des abscisses, puis AH perpendiculaire à cet axe.
D'où le point D tel que AD est rayon du cercle de centre A et de rayon $v_a > h_a$. Comme la variable $\cos(\alpha)$ est solution d'une équation du second degré, on sait la construire à la règle et au compas. D'où l'angle α permettant de tracer les demi-droites AB et AC qui font l'angle α avec AD.