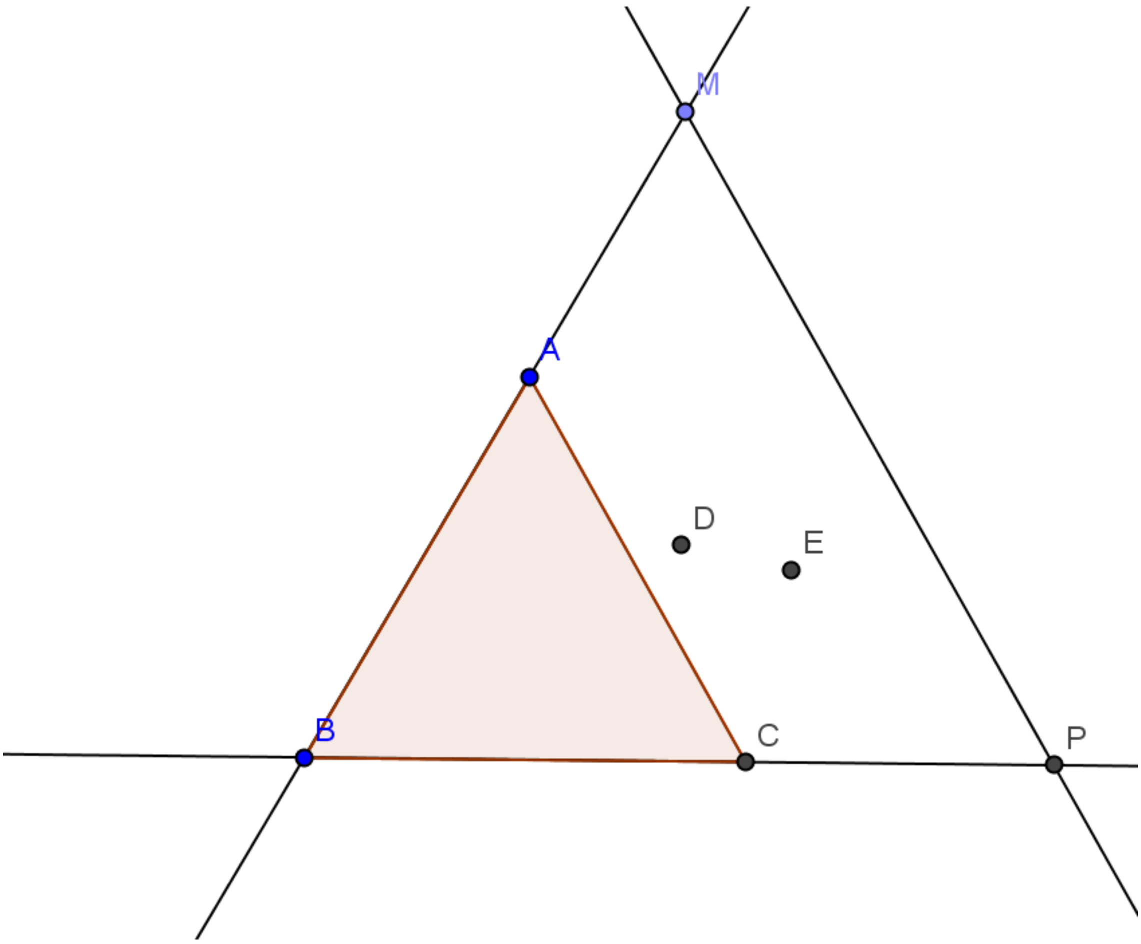
Problema 818

Una recta paralela al lado AC de un triángulo equilátero ABC interseca a AB en M y a BC en P, construyendo el triángulo equiátero BMP.

Sea D el centro de BMP(incentro, ortocentro,...) y E el punto medio de AP. Determina los ángulos del triángulo CDE.

Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (Dolciani Mathematical Expositions Number 19)(MAA)(p. 125)

Solución del director:



Si tomamos como centro de coordenadas B(0,0), y sin pérdida de generalidad tomamos C(1,0), es $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

Así, si P es (m,0), tenemos:

$$M\left(\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}m}{2}\right),D\left(\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}m}{6}\right),E\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Así, el vector $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}m}{6}\right),\ el\ vector\ \overrightarrow{EC}=\left(\frac{3}{4}-\frac{m}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),y\ el\ \overrightarrow{CD}=(\frac{m}{2}-1,\frac{\sqrt{3}m}{6})$

Observemos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{DE}\ y\ \overrightarrow{EC}$:

$$\overrightarrow{DE}\ \overrightarrow{EC} = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}m}{6}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{m}{8} - \frac{3}{16} + \frac{3m}{24} = 0$$

Luego el triángulo DEC es rectángulo en E.

Por otra parte si observamos los módulos de los vectores $\overrightarrow{DE}\ y\ \overrightarrow{DC}, son$:

$$\overrightarrow{DE} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3\,m^2}{36} - \frac{6\,m}{24}}, \overrightarrow{DC} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + 1 - m + \frac{3m^2}{36}}$$

Es decir, $\overrightarrow{DE} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{12} - \frac{m}{4}}\ , \overrightarrow{DC} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{3}} - m$. Al ser la hipotenusa doble de un cateto los ángulos pedidos son 30º 60º 90º.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.

España.