Problema 818 de *triánguloscabri*. *Una recta paralela al lado AC de un triángulo equilátero ABC interseca a AB en M y a BC en P, construyendo el triángulo equiátero BMP.*

Sea D el centro de BMP (incentro, ortocentro, ...) y E el punto medio de AP. Determina los ángulos del triángulo CDE.

Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (p. 125)

Solución por Francisco Javier García Capitán. Usamos números complejos. Reservamos la letra minúscula i para representar la unidad imaginaria y las demás representan a los puntos con las correspondientes letras mayúsculas. Podemos expresar las relaciones:

$$\begin{aligned} a &= \frac{b+c}{2} + \frac{(b-c)\sqrt{3}i}{2}, \\ m &= b + \lambda(a-b), \\ p &= b + \lambda(c-b), \\ d &= \frac{m+p+b}{3}, \\ e &= \frac{a+p}{2}, \end{aligned}$$

siendo λ cierto número real.

A partir de ellas, podemos obtener que

$$\begin{aligned} d - e &= \frac{1}{12}(b-c)\left(3 + \sqrt{3}i(3-2k)\right), \\ c - e &= \frac{1}{4}(b-c)\left(2k - 3 + \sqrt{3}i\right). \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d-e}{c-e} = \frac{i}{\sqrt{3}},$$

lo cual nos indica que el triángulo CDE tiene ángulos de 30°, 60° y 90°.