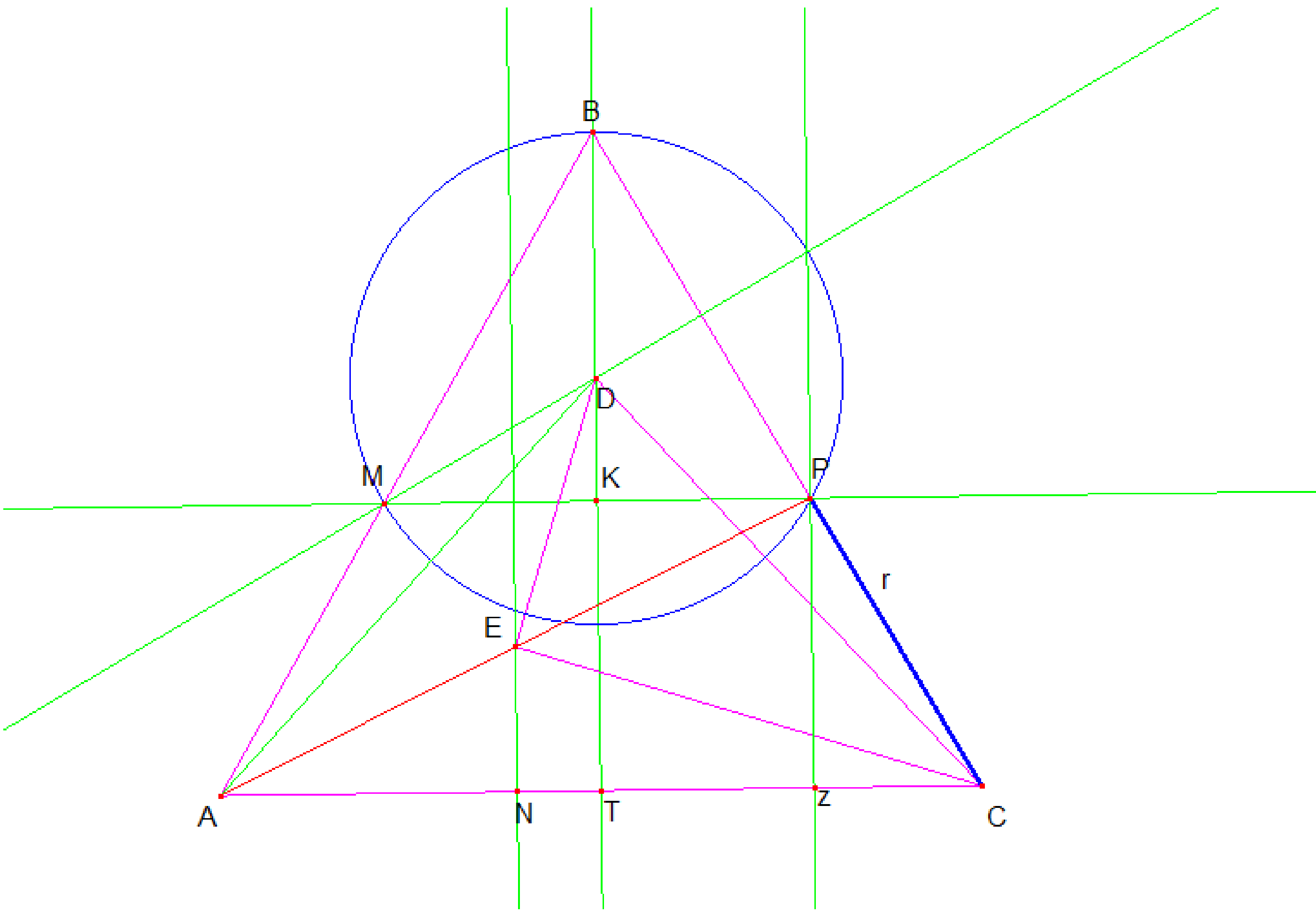
Problema 818

Una recta paralela al lado AC de un triángulo equilátero ABC interseca a AB en M y a BC en P, construyendo el triángulo equiátero BMP.

Sea D el centro de BMP(incentro, ortocentro,...) y E el punto medio de AP. Determina los ángulos del triángulo CDE.

Solución de Inocencio Esquivel García.



Tomemos el lado del triángulo equilátero grande como L

Siendo E, el punto medio de AP se tiene lo siguiente en el triángulo APZ

$$AT = \frac{1}{2}L \qquad EN = \frac{1}{2}PZ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{4}r$$

$$PZ = \frac{\sqrt{3}}{2}r \qquad KD = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(L-r)\ es\ decir\ \frac{1}{3} de\ la\ altura\ del\ triángulo\ MPB$$

$$TD = PZ + KD = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(L-r) = \frac{3}{2\sqrt{3}}r + \frac{1}{2\sqrt{3}}L - \frac{1}{2\sqrt{3}}r = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}r + \frac{1}{2\sqrt{3}}L}$$

las coordenadas del punto **D** *serían* $\left(\mathbf{\frac{1}{2}L\,,\frac{r}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}L}\right)$

Tenemos además que TN = ½ ZC

$$AN = \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}ZC = \frac{1}{2}L - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r\right) = \frac{1}{2}L - \frac{1}{4}r$$

Luego las coordenadas del punto **E** *son*: $\left(\mathbf{\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}r\,,\frac{\sqrt{3}}{4}r}\right)$

Tenemos entonces

$$D\left(\frac{1}{2}L\,,\frac{r}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}L\right)\ ;\quad E\left(\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}r\,,\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)\ ;\quad C(L,0)$$

Hallamos las pendientes de las rectas que pasan por DE y EC.

$$Pendieente\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ ED = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}L + \frac{1}{\sqrt{3}}r - \frac{\sqrt{3}}{4}r}{\frac{1}{4}r}$$

$$Pendiente\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ EC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}r}{-\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}r}$$

Haciendo el producto de las dos pendientes y simplificando vemos que se obtiene (-1) es decir que las dos rectas son perpendiculares, por tanto el ángulo

DEC mide 90°.

Ahora analicemos el ángulo EDC

Tenemos los siguientes referentes

$\sphericalangle KDC = \sphericalangle KDA \quad ; \quad \sphericalangle MDA = \sphericalangle EDK \quad y \quad \sphericalangle MDK = 60°$

$\sphericalangle MDA + \sphericalangle ADE + \sphericalangle EDK = 60° \quad y\ tenemos\ que\ \sphericalangle ADE + \sphericalangle EDK = \sphericalangle KDC$

$\sphericalangle ADE + \sphericalangle EDK = 60° - \sphericalangle MDA = \sphericalangle KDC$

Luego

$\sphericalangle KDC + \sphericalangle MDA = 60° \ \ Como\ \sphericalangle MDA = \sphericalangle EDK \quad entonces$

$\sphericalangle KDC + \sphericalangle EDK = \boldsymbol{\sphericalangle \mathbf{EDC} = 60°}$

Por consiguiente el ángulo **DEC mide 30°**