# TRIÁNGULOS CABRI

**Problema 818.** (Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (Dolciani Mathematical Expositions Number 19)(MAA)(p. 125)) Una recta paralela al lado $CA$ de un triángulo equilátero $ABC$ interseca a $AB$ en el punto $M$ y a $BC$ en el punto $P$, construyendo el triángulo equilátero $BMP$. Sean $D$ el centro de $BMP$ y $E$ el punto medio del segmento $AP$. Determinar los ángulos del triángulo $CDE$.

*Solución:*

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que los lados del triángulo $ABC$ tienen longitud unidad, por lo que:

$$a = b = c = 1 \Rightarrow S_A = S_B = S_C = \frac{1}{2}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si:

$$\begin{cases} M = (t : 1-t : 0) \\ P = (0 : 1-t : t) \end{cases} \quad (0 \neq t \neq 1)$$

entonces:

$$\begin{cases} D = (t : 3-2t : t) \\ E = (1 : 1-t : t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \equiv 0 = (2t-3)x + ty \\ DE \equiv 0 = t(t-2)x + t(t-1)y + (t^2-3t+3)z \\ EC \equiv 0 = (1-t)x - y \end{cases}$$

por lo que:

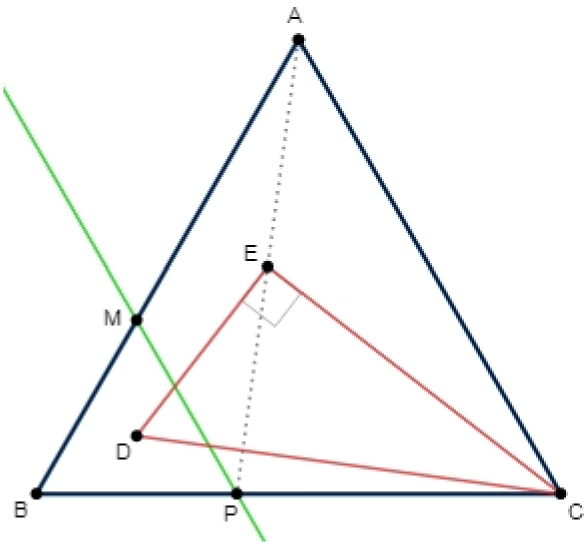
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\ \cot \measuredangle ECD}{2} = S \cot \measuredangle ECD = \dfrac{\frac{1}{2}[-t + (1-t)(2t-3) + (2-t)(t-3)]}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-t & -1 & 0 \\ 2t-3 & t & 0 \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}\ \cot \measuredangle CDE}{2} = S \cot \measuredangle CDE = \dfrac{\frac{1}{2}[t(2t-3) + (2t-3)(t-3) - (t-3)t]}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t-3 & t & 0 \\ t(t-2) & t(t-1) & t^2-3t+3 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cot \measuredangle ECD = \sqrt{3} \\ \cot \measuredangle CDE = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} \measuredangle ECD = \dfrac{\pi}{6} \\ \measuredangle CDE = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \measuredangle DEC = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

**Miguel-Ángel Pérez García Ortega**

# TRIÁNGULOS CABRI




**Miguel-Ángel Pérez García Ortega**