Problema 818

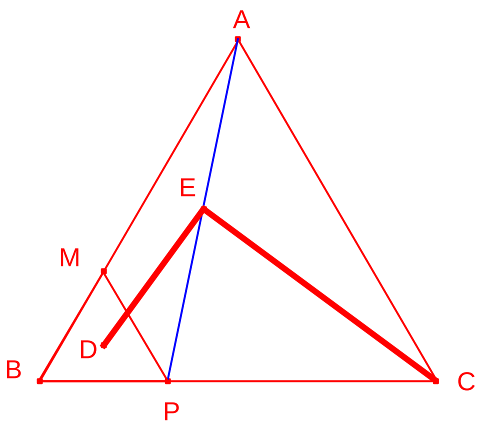
Una recta paral·lela al costat $\overline{AC}$ d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ intersecta a $\overline{AB}$ en M i a $\overline{BC}$ en P, construint el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BMP}$.

Siga D el centre del triangle $\overset{\Delta}{BPM}$ i E el punt mig del segment $\overline{AP}$.

Determineu els angles del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (Dolciani Mathematical Expositions Number 19)(MAA)(p. 125)

Solució de Ricard Peiró i Estruch.



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades:

$B(0, 0)$, $C(2c, 0)$, $A\left(c, c\sqrt{3}\right)$.

Siga $P(2x, 0)$.

Aleshores, $M\left(x, x\sqrt{3}\right)$. Aplicant la propietat del baricentre:

$D\left(x, \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)$.

Les coordenades del punt mig E del segment $\overline{AP}$ són:

$E\left(\frac{2x+c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$.

Calculem els costats del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\overline{CD} = \sqrt{(2c-x)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{4c^2 - 4cx + \frac{4}{3}x^3}.$$

$$\overline{CE} = \sqrt{\left(\frac{2x+c}{2} - 2c\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3c^2 - 3cx + x^2}.$$

$$\overline{DE} = \sqrt{\left(\frac{2x+c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{c^2 - cx + \frac{1}{3}x^2}.$$

Notem que $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$. Aplicant el teorema invers de Pitàgores:

El triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és rectangle $\angle CED = 90^o$.

A més a més, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$.

Aleshores, $\angle EDC = 60^o$, $\angle ECD = 30^o$.