Problema 818

Problema 818

Una recta paralela al lado AC de un triángulo equilátero ABC interseca a AB en M y a BC en P, construyendo el triángulo equiátero BMP.

Sea D el centro de BMP(incentro, ortocentro,...) y E el punto medio de AP. Determina los ángulos del triángulo CDE.

Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (Dolciani Mathematical Expositions Number 19)(MAA)(p. 125)

Solución de Ricard Peiró i Estruch.

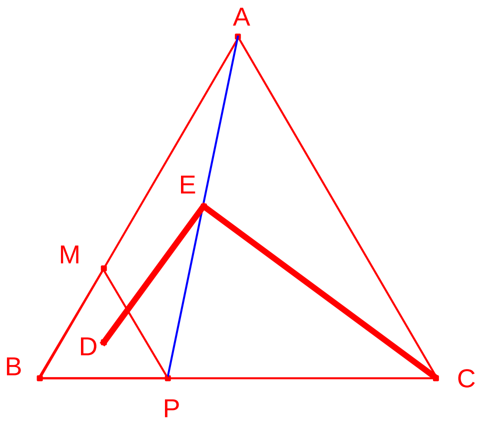
Consideramosel triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ con las siguientes coordenadas:

$B(0,0)$, $C(2c,0)$, $A\left(c, c\sqrt{3}\right)$.

Siga $P(2x,0)$.

Entonces, $M\left(x, x\sqrt{3}\right)$. Aplicando la propiedad del baricentro:

$$D\left(x, \frac{x\sqrt{3}}{3}\right).$$



Les coordenadas del punto medio E del segmente $\overline{AP}$ son:

$$E\left(\frac{2x+c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{2}\right).$$

Calculemos los lados del triángulo $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\overline{CD} = \sqrt{(2c-x)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{4c^2 - 4cx + \frac{4}{3}x^3}.$$

$$\overline{CE} = \sqrt{\left(\frac{2x+c}{2} - 2c\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3c^2 - 3cx + x^2}.$$

$$\overline{DE} = \sqrt{\left(\frac{2x+c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{c^2 - cx + \frac{1}{3}x^2}.$$

Notamos que $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$. Aplicando el teorema inverso de Pitágoras:

El triángulo $\overset{\Delta}{CDE}$ es rectángulo $\angle CED = 90^o$.

Ade más, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$.

Entonces, $\angle EDC = 60^o$, $\angle ECD = 30^o$.