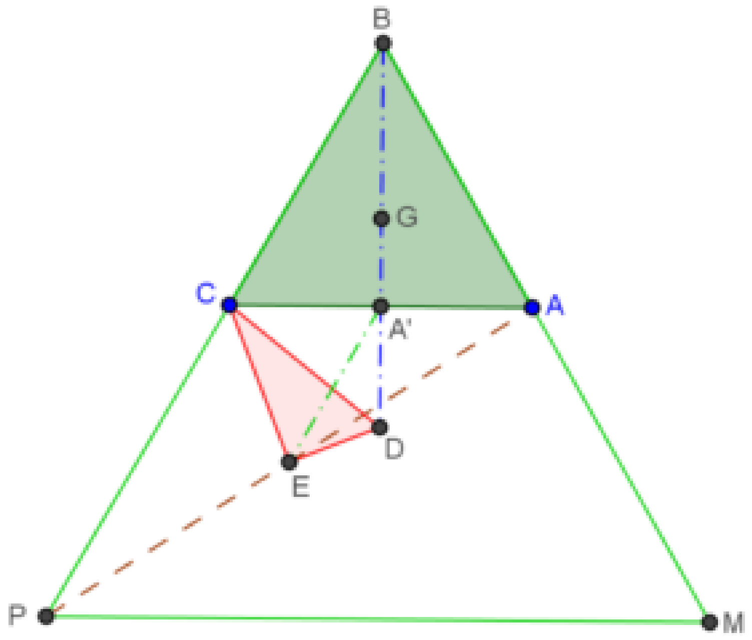
Quincena del 1 al 15 de Abril de 2017.

***Problema 818**.- Una recta paralela al lado AC de un triángulo equilátero ABC interseca a AB en M y a BC en P, construyendo el triángulo equiátero BMP.*

Sea D el centro de BMP (incentro, ortocentro,...) y E el punto medio de AP. Determina los ángulos del triángulo CDE.

Honsberger, R. (1997): In Pólya's Footsteps (Dolciani Mathematical Expositions Number 19)(MAA)(p. 125)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Supongamos que el triángulo equilátero ABC tiene lado 1. El triángulo BMP, semejante a él, tiene lado k (la razón de semejanza).

En el triángulo ACP podemos calcular el valor de la mediana CE, pues conocemos el lado CA, $CP = (k-1)$ y el ángulo comprendido $\sphericalangle ACP = 120°$.

Aplicando el teorema del coseno podemos poner $AP^2 = CP^2 + CA^2 + CP \cdot CA$, con ello

$CE^2 = \frac{CP^2+CA^2}{2} - \frac{AP^2}{4} = \frac{CP^2+CA^2-CP\cdot CA}{4}$ y expresando CP en función de k resulta al fin

$$\boxed{CE^2 = \frac{(k-1)^2+1-(k-1)}{4} = \frac{k^2-3k+3}{4}}.$$

En el triángulo BCD podemos calcular CD, pues conocemos el ángulo en B $(30°)$ y las longitudes de los lados BC y $BD = k \cdot BG = \frac{k}{\sqrt{3}}$.
Resulta así aplicando otra vez el teorema del coseno

$$\boxed{CD^2 = BC^2 + BD^2 - \sqrt{3}\cdot BC \cdot BD = 1 + \frac{k^2}{3} - k = \frac{k^2-3k+3}{3}}.$$

Por último, en el triángulo $A'ED$ tenemos la misma situación: conocemos el ángulo en A' (también 30°) y los lados del mismo, ya que $A'E$ es la paralela media de ACP, por tanto, $A'E = \frac{CP}{2} = \frac{k-1}{2}$, $A'D = BD - BA' = \frac{k}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2k-3}{2\sqrt{3}}$

$$\boxed{DE^2 = A'E^2 + A'D^2 - \sqrt{3}\cdot A'E \cdot A'D = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + \frac{(2k-3)^2}{12} - \frac{k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2} = \frac{k^2-3k+3}{12}}.$$

Es fácil comprobar ahora que se trata de un triángulo rectángulo pues, $CD^2 = CE^2 + ED^2$ además, DE es exactamente la mitad de la hipotenusa, o sea, es el triángulo rectángulo $90, 60, 30$.■