TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 819.</u> (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dado un triángulo ABC, se considera un punto D situado sobre su circunferencia circunscrita. Las rectas AB y CD se cortan en el punto E. Las rectas BC y AD se cortan en el punto F. Las rectas EF y CA se cortan en el punto J. Hallar el lugar geométrico que describe el centro de circuncírculo del triángulo CDJ cuando D recorre el circuncírculo del triángulo ABC.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $F=(0:1-t:t)\ (t\in\mathbb{R})$, como:

$$AF \equiv ty-(1-t)z=0$$

y la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz=0$$

resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$D=(a^2t(1-t):-(1-t)(c^2(1-t)+b^2t):-t(c^2(1-t)+b^2t))$$

por lo que:

$$CD\equiv[c^2(1-t)+b^2t]x+a^2ty=0$$

luego:

$$E=CD\cap AB=(a^2t:-(c^2(1-t)+b^2t):0)$$

siendo:

$$EF\equiv[c^2(1-t)+b^2t]x+a^2ty-a^2(1-t)z=0$$

y, por tanto:

$$J=EF\cap CA=(a^2(1-t):0:c^2(1-t)+b^2t)$$

Además, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo CDJ es:

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz-b^2\left[\left(\frac{c^2(1-t)+b^2t}{a^2+c^2-2S_Bt}\right)x+\left(\frac{a^2t}{a^2+c^2-2S_Bt}\right)z\right](x+y+z)=0$$

entonces, su centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto:

$$W=(2a^2(c^2-a^2)S_B(1-t):2a^2b^2(S_B+c^2)(1-t):a^4c^2+2a^2b^2c^2-b^4c^2+2b^2c^4-c^6+(-a^4b^2+2a^2b^4-b^6-a^4c^2+3b^4c^2-3b^2c^4+c^6)t)$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=2a^2(c^2-a^2)S_B(1-t)\theta \\ y=2a^2b^2(S_B+c^2)(1-t)\theta \\ z=a^4c^2+2a^2b^2c^2-b^4c^2+2b^2c^4-c^6+(-a^4b^2+2a^2b^4-b^6-a^4c^2+3b^4c^2-3b^2c^4+c^6)t \end{cases} \qquad (\theta\in\mathbb{R}^*)$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

resulta que el punto W está situado sobre la recta de ecuación:

$$b^2(S_B + c^2)x - (c^2 - a^2)S_B y = 0$$

que pasa por el punto C, pero, para poder representarla gráficamente, necesitamos conocer, al menos, otro de sus puntos. Tomando $D = B$, como $t = 0$, resulta que $J = J_0 = (a^2 : 0 : c^2)$, es decir, el punto J_0 es el pie de la ceviana CK, siendo $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ el punto simediano del triángulo ABC. Por tanto, otro punto de esta recta es el punto W_0 de intersección entre las mediatrices de los segmentos BC y J_0C.