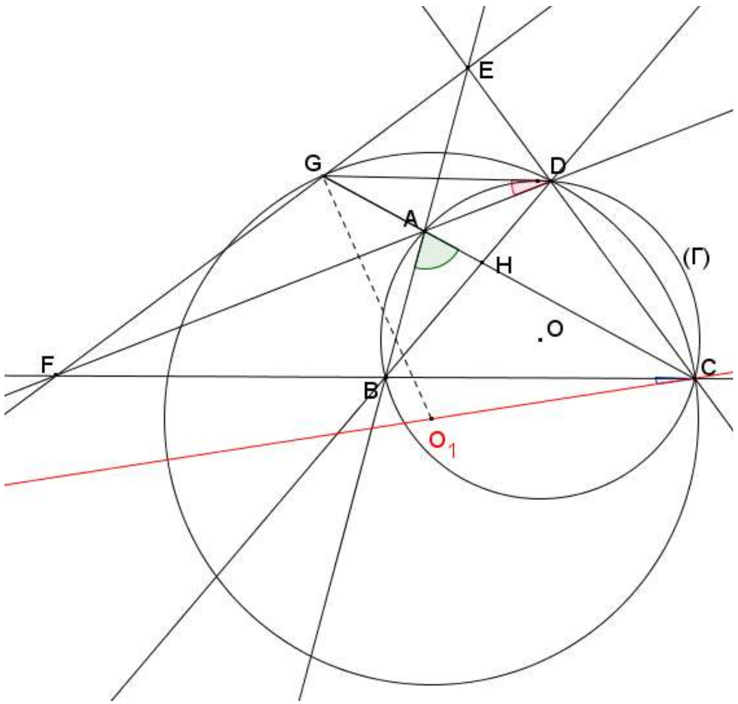
Problema n° 819
Sean un triangulo ABC y un punto cualquiera D de la circunferencia circunscrita a ABC.
Las rectas AB y CD se cortan en un punto E.
Las rectas BC y AD se cortan en un punto F.
Las rectas EF y AC se cortan en un punto G.
Cuando D recorre la circunferencia circunscrita a ABC,hallar el lugar del centro del círculo circunscrito al triángulo CDG.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme: quand le point D parcourt le cercle (Γ) circonscrit à ABC, l'angle $\angle$ADG est constant.
Démonstration
Soit H le point d'intersection des droites AC et BD.Par construction la droite EF est la polaire du point H par rapport au cercle (Γ) et les quatre points G,H,A et C forment une division harmonique.
On a donc GA/GC = HA/HC.
Or d'après la loi des sinus dans les triangles GAD,GCD,HAD et HCD, on a respectivement:
GA/GD = sin($\angle$**ADG**) / sin($\angle$GAD) = sin($\angle$**ADG**) / sin($\angle$**CAD**)
GC/GD = sin($\angle$CDG) / sin($\angle$DCG) = sin($\angle$**ADG**+$\angle$ADC) / sin($\angle$**ACD**)
HA/HD = sin($\angle$ADB) / sin($\angle$CAD) = sin($\angle$ACB) / sin($\angle$**CAD**)
HC/HD = sin($\angle$BDC) / sin($\angle$ACD) = sin($\angle$BAC) / sin($\angle$**ACD**)
D'où GA/GC = sin($\angle$**ADG**). sin($\angle$**ACD**) / sin($\angle$**CAD**)sin($\angle$**ADG**+$\angle$ADC)]
HA/HC = sin($\angle$ACB). sin($\angle$**ACD**) / sin($\angle$**CAD**)sin($\angle$BAC)]
Il en résulte que sin($\angle$**ADG**).sin($\angle$BAC) = sin($\angle$ACB).sin($\angle$**ADG** + $\angle$ADC)
Comme les angles $\angle$BAC, $\angle$ACB et $\angle$ADC = 180° – $\angle$ABC sont fixes,il en est de même de l'angle $\angle$**ADG**.

Soit O_1 le centre du cercle circonscrit au triangle CDG.
On a les relations d'angles $\angle CO_1G$= 2(180° – $\angle$ CDG) et $\angle BCO_1$ + $\angle$ACB = 90° – $\angle CO_1G$/2.
D'où $\angle BCO_1$ = 90° – $\angle$(180° – $\angle$CDG) – $\angle$ACB = $\angle$CDG – $\angle$ACB – 90°
ou encore $\angle BCO_1$ = $\angle$ADG + 180° – $\angle$ABC – $\angle$ACB – 90° = $\angle$BAC + $\angle$ADG – 90° = cte
La droite O_1C faisant un angle constant avec la droite BC, le lieu de O_1 est la droite passant par C telle que $\angle(CB,CO_1)$ = $\angle$BAC + $\angle$ADG – 90°.