***Problema* 819**.- Sean un triangulo ABC y un punto cualquiera D de la circunferencia circunscrita a ABC.

Las rectas AB y CD se cortan en un punto E.

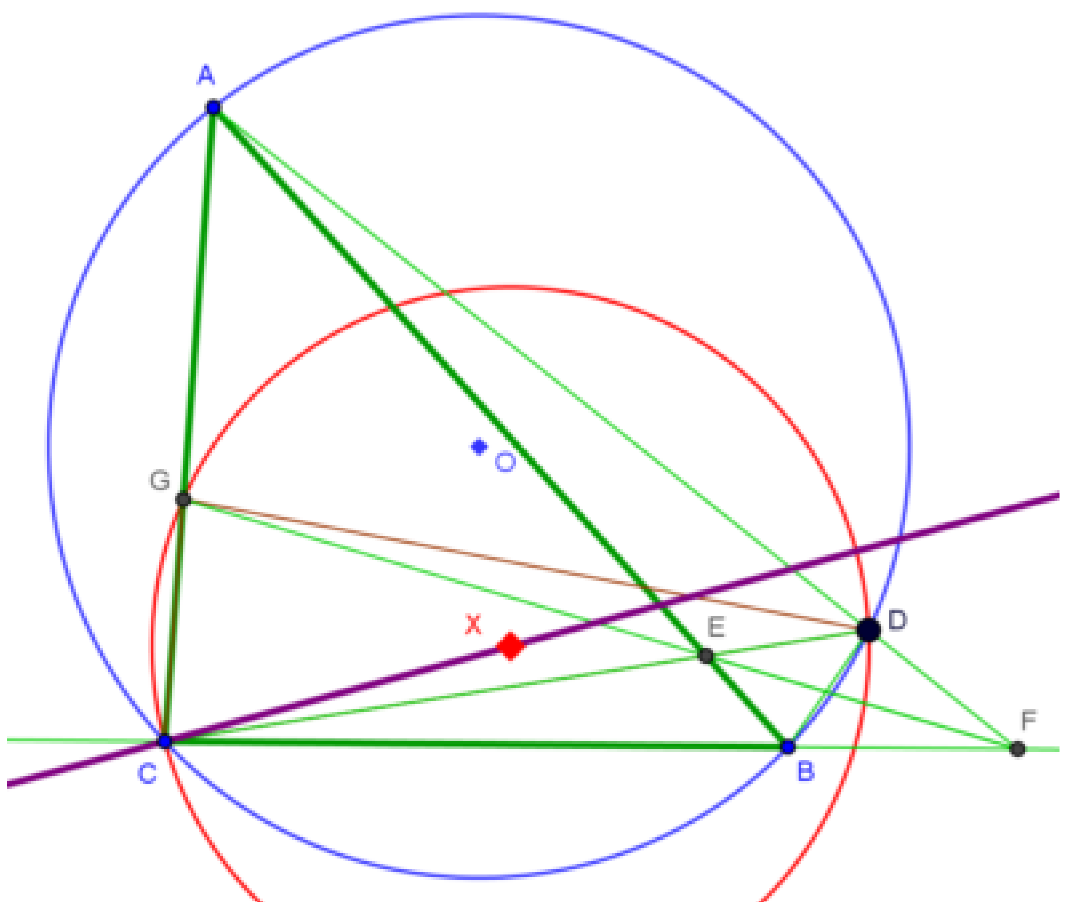
Las rectas BC y AD se cortan en un punto F.

Las rectas EF y AC se cortan en un punto G.

Cuando D recorre la circunferencia circunscrita a ABC, hallar el lugar del centro del círculo circunscrito al triángulo CDG.

Fondanaiche, P. (2017) Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Observando la figura obtenida podemos aventurar que el lugar geométrico buscado es una recta que pasa por el punto C. Vamos a tratar de demostrar esta cuestión.

Utilizamos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC. Tenemos lo siguiente:

Sea D un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita, $D(u:v:w)$; la proyección de D sobre AB desde C es

$E = AB \cap CD = (u:v:0)$ y la proyección de D sobre BC desde A es $F = BC \cap AD = (0:v:w)$. CD es la recta $vx - uy = 0$ AD e

la de ecuación $wy - yvz = 0$. Con esto para la recta EF es tenemos $\frac{x}{u} - \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0$. Y ahora $G = EF \cap AC = (u:0:-w)$.
La ecuación de una circunferencia cualquiera en estas coordenadas es de la forma

$\Gamma(x,y,z) - (x+y+z)(px+qy+rz) = 0 \quad (*)$

donde $\Gamma(x,y,z) = 0$ es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es decir:

$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

El centro de esta circunferencia es el punto cuyas coordenadas son

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -a^2p + S_Cq + S_Br + a^2S_A \\ y_0 = -b^2q + S_Cp + S_Ar + b^2S_B \\ z_0 = -c^2r + S_Aq + S_Bp + c^2S_C \end{array}\right\}$$

Para hallar la ecuación de la que pasa por los puntos C, G y D sustituimos en la expresión $(*)$ las coordenadas de esos puntos y resolvemos un sencillo sistema lineal que nos proporciona la ecuación

$$(CDG): \qquad \Gamma(x,y,z) - \frac{b^2w}{v(u-w)}(x+y+z)(-vx+uy) = 0$$

Su centro $X = (x_0: y_0: z_0)$, según lo expresado más arriba, es el punto de coordenadas

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = a^2S_A + \dfrac{b^2w}{v(u-w)}(uS_C + a^2v) \\ y_0 = b^2S_B - \dfrac{b^2w}{v(u-w)}(vS_C + b^2u) \\ z_0 = c^2S_C + \dfrac{b^2w}{v(u-w)}(uS_A - vS_B) \end{array}\right\}$$

donde $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$, y expresiones análogas para S_B y S_C.

Para demostrar la conjetura de que los centros se mueven por una recta que pasa por C, bastará con demostrar que el cociente de las dos primeras coordenadas del centro es una constante que sólo depende del triángulo, no del punto D elegido sobre su circunscrita.

En los cálculos que siguen utilizaremos esa pertenencia de D, o sea, $a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0$ o en la forma $a^2v + b^2u = \frac{-c^2uv}{w}$, así como la relación entre las constantes $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$, S_B y S_C, como por ejemplo $S_B + S_B = c^2$, y las análogas variando las letras.

Vamos a desarrollar la y de este punto X

$$\frac{y_0}{b^2} = S_B - \frac{w}{v(u-w)}(vS_C + b^2u) = S_B - \frac{w}{v(u-w)}(v(a^2 - S_B) + b^2u)$$
$$= S_B - \frac{w}{u-w}\left(\frac{-c^2u}{w} - S_B\right) = S_B\left(1 + \frac{w}{u-w}\right) + \frac{c^2u}{u-w} = \frac{u(S_B + c^2)}{u-w}$$

$$y_0 = \frac{u}{u-w}(S_B + c^2)b^2 \qquad (1)$$

En vista del resultado vamos a ver si la coordenada x_0 es igual a una constante, salvo el factor $\frac{u-w}{u}$, para ello tomamos ahora

$$\frac{u-w}{u}x_0 = \frac{(u-w)v}{uv} \cdot \left(a^2S_A + \frac{b^2w}{v(u-w)}(uS_C + a^2v)\right) =$$

$\frac{uv-wv}{uv} \cdot \left[a^2(c^2 - S_B) + \frac{b^2w}{v(u-w)} \cdot (u(a^2 - S_B) + a^2v)\right] = \frac{1}{uv}[a^2(b^2vw - c^2vw +$
$(b^2wu + c^2uv)) - S_B(a^2uv + b^2wu - a^2vw)] = \frac{1}{uv}\left[a^2\left((b^2 - c^2)vw - a^2vw\right) -\right.$
$S_B(a^2uv + b^2wu - a^2vw)] = \frac{1}{uv}[a^2(-2vwS_B) - S_B(a^2uv - a^2vw + b^2wu)] =$
$\frac{1}{uv}\left[-S_B\left(a^2uv + (a^2vw + b^2wu)\right)\right] = \frac{-S_B}{uv}(a^2uv - c^2uv) = (c^2 - a^2)S_B$

y por tanto $\qquad x_0 = \frac{u}{u-w} \cdot (c^2 - a^2)S_B \qquad (2)$

De las expresiones (1) y (2) concluimos que $\frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2(S_B+c^2)}{(c^2-a^2)S_B}$ y por tanto, los centros de esas circunferencias se mueven, al variar D, por la recta de ecuación

$b^2(S_B + c^2)x - (c^2 - a^2)S_By = 0$ ■