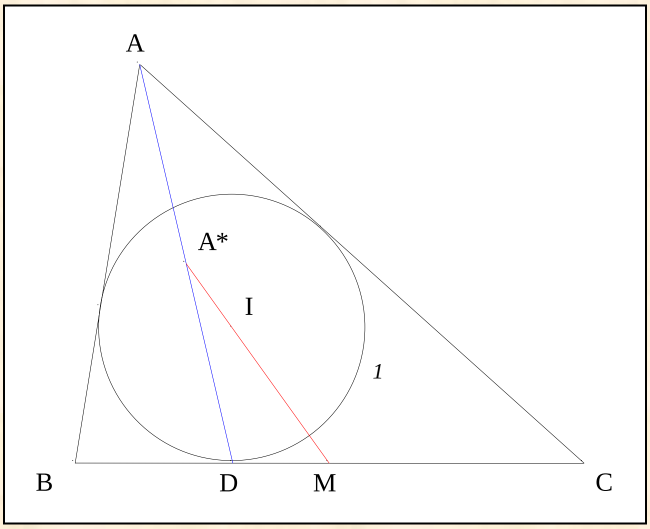
À PROPOS

DE

LA PONCTUELLE (MI)

†

Jean - Louis AYME



Résumé. L'article présente une ponctuelle remarquable du triangle dont les points identifiés conduisent chacun à un développement particulier.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

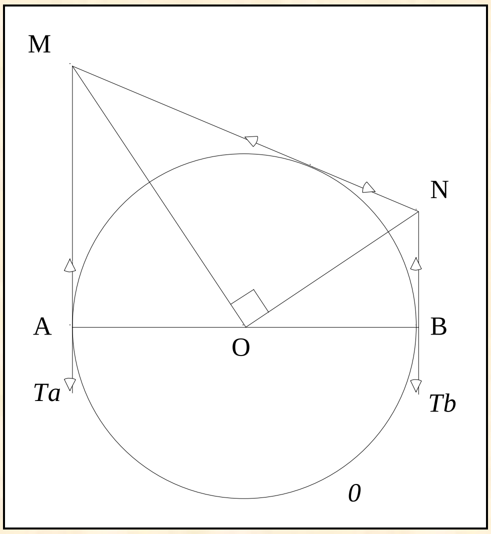
Sommaire

A. LE POINT A* D'UNE GERGONNIENNE

1. L'angle droit pivotant

VISION

Figure :

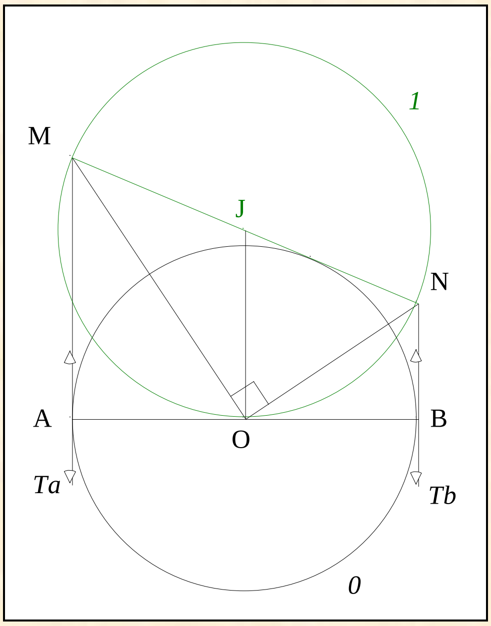


Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,

	A, B	deux points diamétraux de *0*,
	Ta, *Tb*	les tangentes à *0* resp. en A, B
et	M, N	deux points du même demi-plan de frontière (AB), situés resp. sur *Ta*, *Tb*.

Donné : le triangle ONM est O-rectangle *si, et seulement si*, (MN) est tangente à *0*.

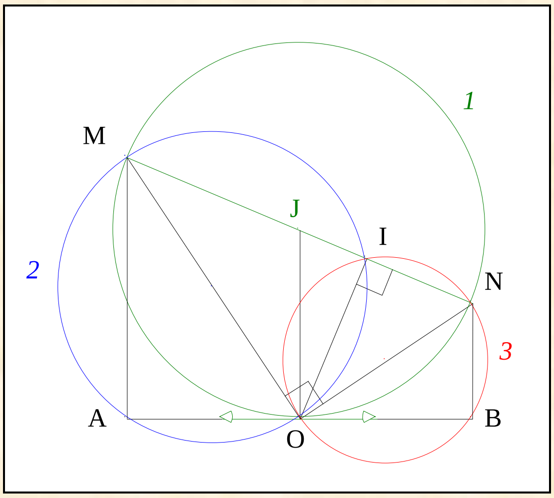
VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1* le cercle de diamètre [MN] ; il passe par O ;
  et J le point d'intersection de la parallèle à (AM), passant par O, avec (MN).

- D'après l'axiome IIIa de passage, J est le milieu de [MN];
  en conséquence, J est le centre de *1*.

- Nous avons (OJ) // (AM) ;
  par hypothèse, (AM) ⊥ (AB) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OJ) ⊥ (AB) ;
  en conséquence, (AB) est la tangente à *1* en O.

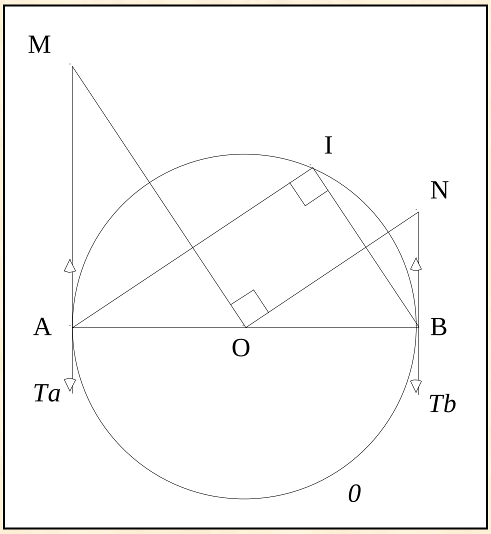


- Notons I le pied de la perpendiculaire à (MN) issue de O ; (OI) ⊥ (MN).

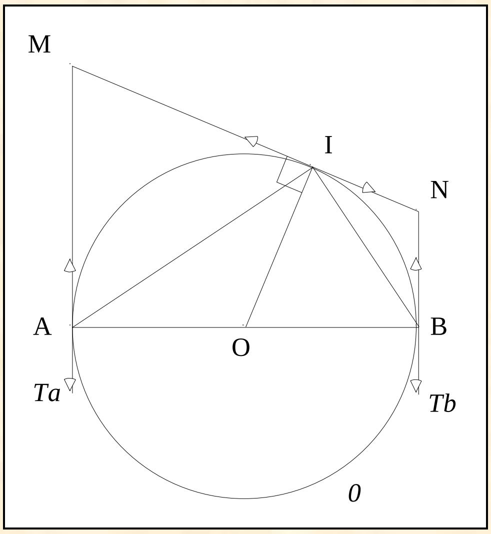
- Notons *3* le cercle de diamètre [OM] ; il passe par A et I ;
  et *4* le cercle de diamètre [ON] ; il passe par B et I.

- Les cercles *2* et *1*, les points de base M et O, les moniennes (AOO) et (IMN), conduisent au théorème **2** de Reim ; il s'en suit que (AI) // (ON).

- Les cercles *3* et *1*, les points de base O et N, les moniennes (BOO) et (INM), conduisent au théorème **2** de Reim ; il s'en suit que (BI) // (OM).



- D'après "Angles à côtés perpendiculaires", le triangle MON étant O-rectangle, le triangle AIB est I-rectangle.



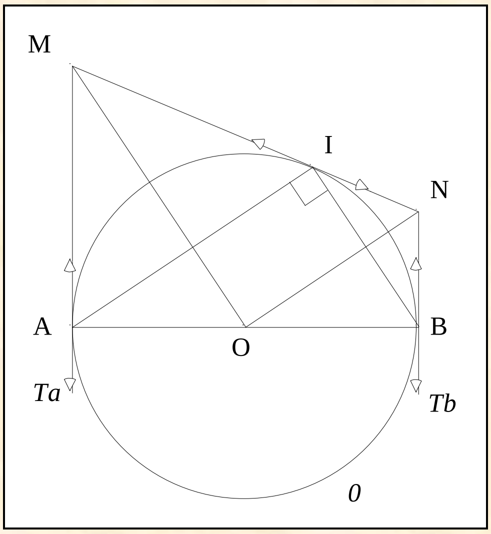
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle AIB étant I-rectangle, est inscriptible dans un demi-cercle de diamètre [AB].

- **Conclusion :** (MN) est tangente à *0* en I.

Énoncé traditionnel : *si,* un angle droit pivote au centre d'un cercle circonscrit par une bande[1]
alors, il détermine une droite tangente à ce cercle.

[1] Les tangentes *Ta* et *Tb* en deux points diamétraux du cercle, sont parallèles; elles définissent une bande.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons I le point de contact de (MN) avec *0*.

- Le triangle IAB étant inscriptible dans un demi-cercle, est I-rectangle ; (IA) ⊥ (IB) ;
  nous savons que (IA) ⊥ (OM) et (IB) ⊥ (ON) ;
  la relation ⊥ étant compatible avec elle-même, (OM) ⊥ (ON) .

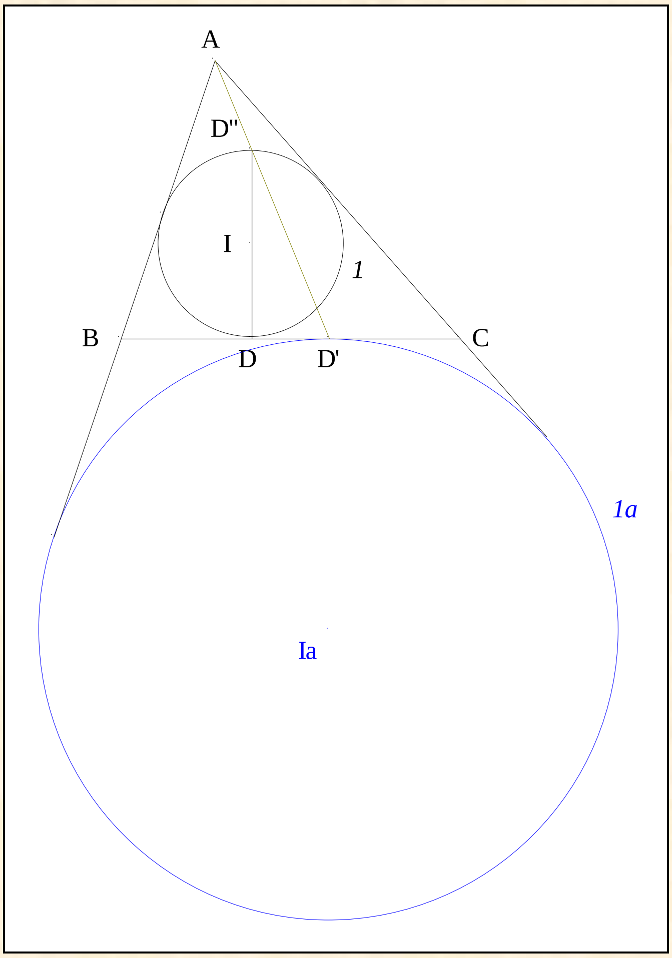
- **Conclusion :** le triangle ONM est O-rectangle.

Énoncé traditionnel : *si,* une tangente enveloppe un cercle circonscrit par une bande
alors, elle détermine au centre un angle droit.

2. Une nagelienne

VISION

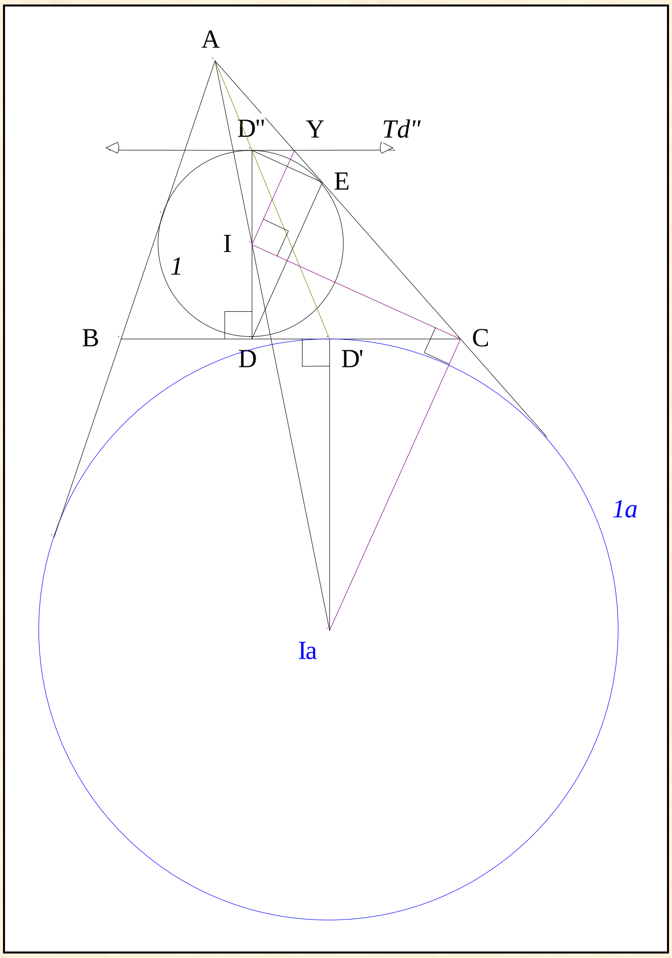
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit dans ABC,
	I	le centre de *1*,
	1a	le A-excercle de ABC,
	Ia	le centre de *2*,
	D	le point de contact de *1* avec (BC),
	D'	le point de contact de *1a* avec (BC)
et	D''	l'antipôle de D relativement à *1*.

Donné : (AD'a) passe par D''.

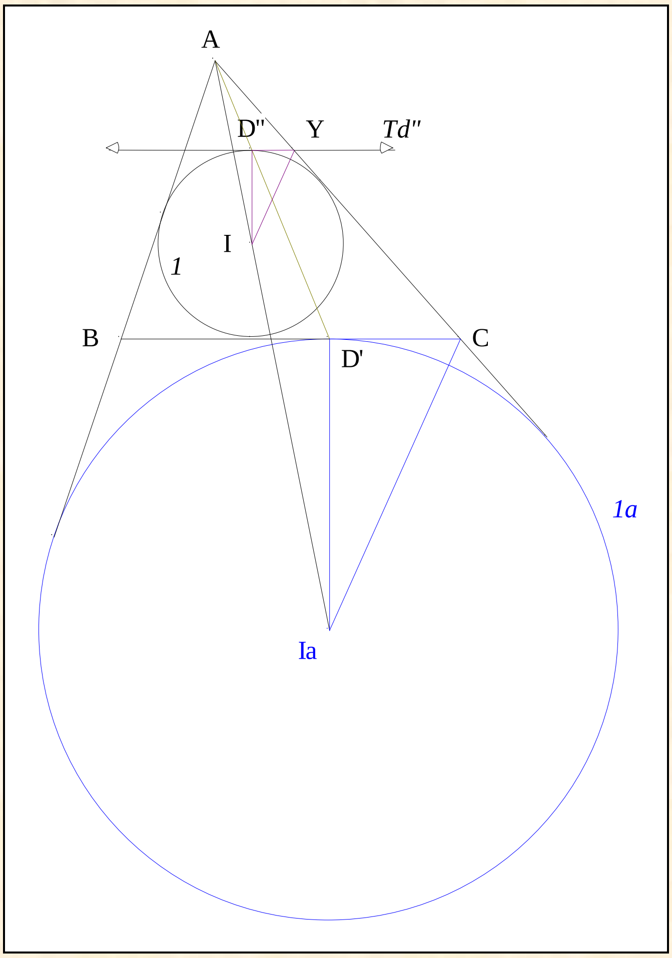
VISUALISATION



- Notons E le point de contact de *1* avec (CA),
  Td'' la tangente à *1* en P''
  et Y le point d'intersection de *Td''* avec (CA).

- Remarquons que **(1)** *Td''* i.e (P''Y) est parallèle à (BDC).
  (2) (IaD') est parallèle (DID'').

- D'après A. 1. L'angle droit pivotant, (IY) ⊥ (IC) ;
  les C-bissectrices intérieure et extérieure de ABC, étant perpendiculaires, (CI) ⊥ (CIa) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IY) // (CIa).



- Les triangles ID"Y et IaD'C ayant leurs côtés correspondants parallèles deux à deux, sont homothétiques.

- D'après Desargues "Le théorème faible" [2],
  appliqué aux triangles homothétiques ID"Y et IaD'C, A, P" et P' sont alignés.

- **Conclusion :** (AD') passe par D".

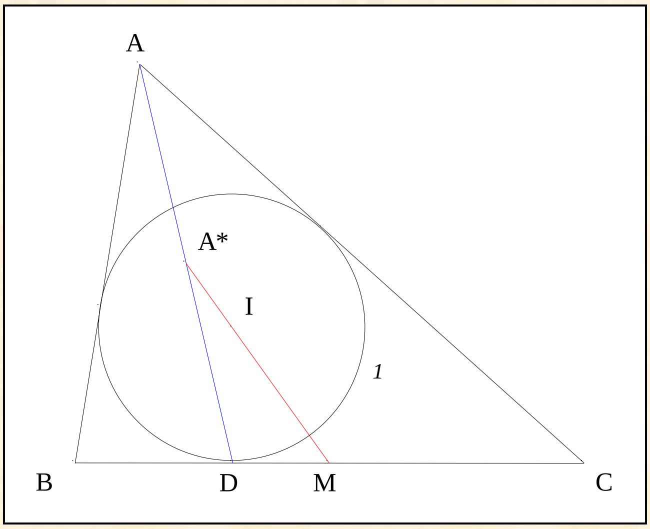
Scolie : D et D'a sont deux points isotomiques de [BC].

3. Milieu d'une gergonnienne

VISION

Figure :

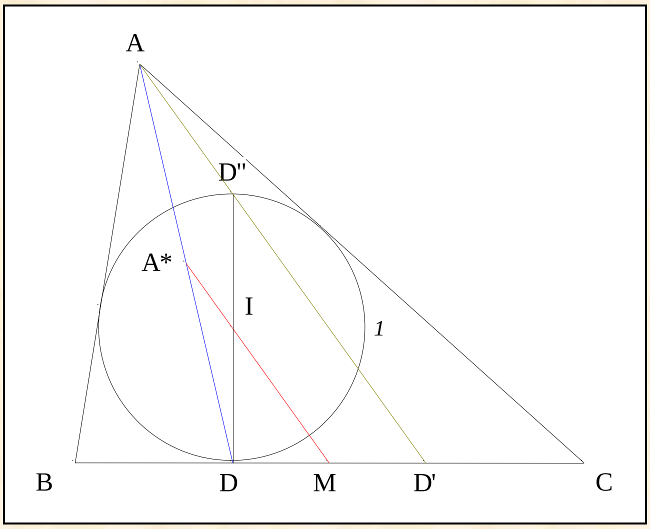
[2] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol.6 , p.39 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
D le point de contact de *1* avec (BC),
M le milieu de [BC]
et A* le point d'intersection de (MI) avec (AD).

Donné : A* est le milieu de [AD]. [3]

VISUALISATION



- **Scolie :** (AD) est la A-nagelienne de ABC.

- Notons D'a l'isotomique de D relativement à [BC]
et D'' l'antipôle de D relativement à *1*.

- D'après A. 2. Une nagelienne, la nagelienne (AD') passe par D''.

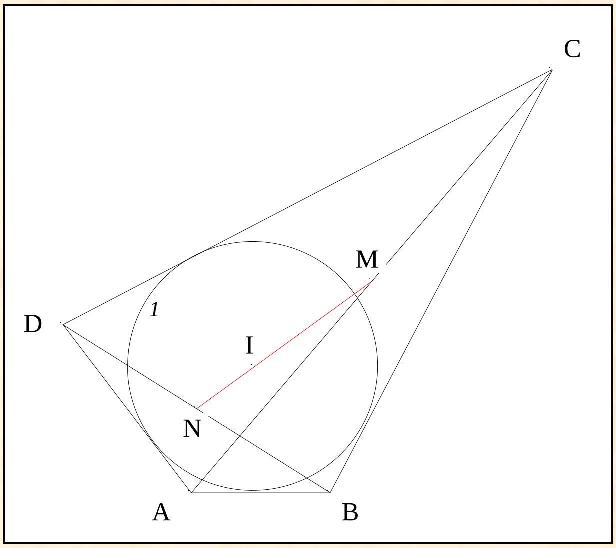
- D'après Thalès, "La droite des milieux" appliquée au triangle DD'D'', (MI) // (AD'D'').

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIa, A* est le milieu de [AD].

3 Durrande J. B., Démonstration d'un théorème de Géométrie, *Annales* de Gergonne **14** (1823-24) 309-313 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA.

Énoncé traditionnel : dans un triangle, la droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la gergonnienne correspondante, passe par le centre du cercle inscrit de ce triangle

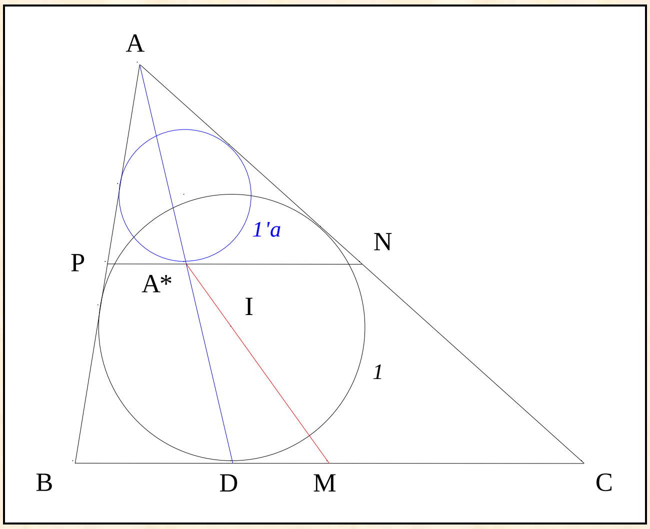
Scolies : **(1)** ce résultat est un cas particulier du théorème de Newton [4]



dans tout quadrilatère circonscrit,
la droite qui joint les milieux des diagonales, passe par le centre du cercle.

Lorsque le quadrilatère tangentiel se dégénère en un triangle tangentiel,
nous retrouvons notre résultat.

(2) Une autre nature géométrique de A*



- Notons MNP le triangle médian de ABC
  et *1'a* le cercle inscrit dans le triangle AB'C'.

- Les triangle APN et ABC étant homothétiques, A* est le point correspond à D dans cette homothétie.

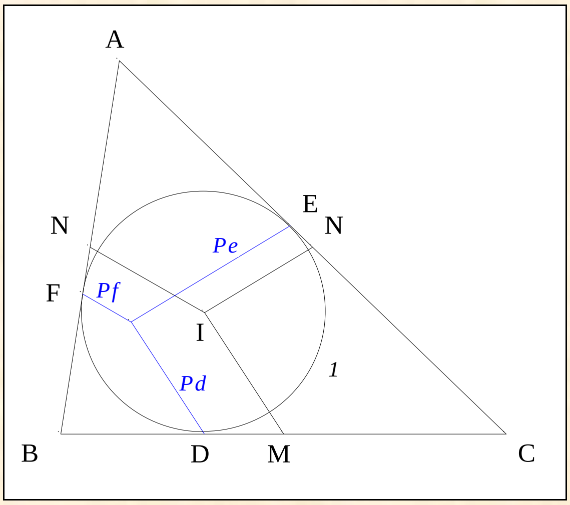
[4] Newton I., Livre I, lemme 25, corollaire 5, *Principes mathématiques* (1687).

- **Conclusion :** A* est le point de contact de *1'a* avec (PN).

4. Parallèles aux droites (MI) d'un triangle

VISION

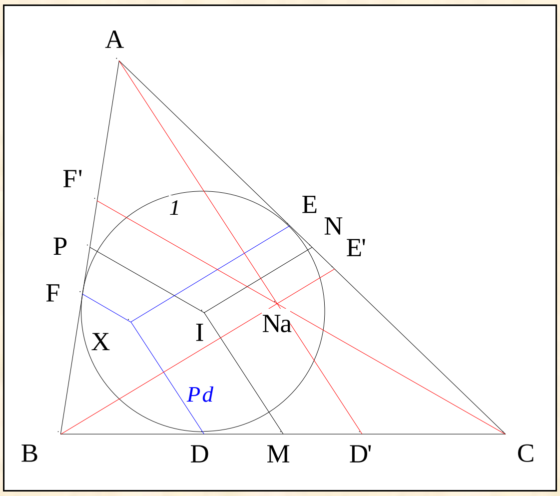
Figure :



Traits :		ABC	un triangle,
		I	le centre de ABC,
		DEF	le triangle de contact de ABC,
		MNP	le triangle médian de ABC
	et	*Pd*, *Pe*, *Pf*	les parallèles à (MI), (NI), (PI) passant resp. par D, E, F.

Donné : *Pd*, *Pe* et *Pf* sont concourantes.[5]

VISUALISATION



[5] Seimiya T., *Crux Mathematicorum* ; http://www.math.ca/crux/.

- Notons D', E', F' les symétriques de D, E, F resp. par rapport à M, N, P.

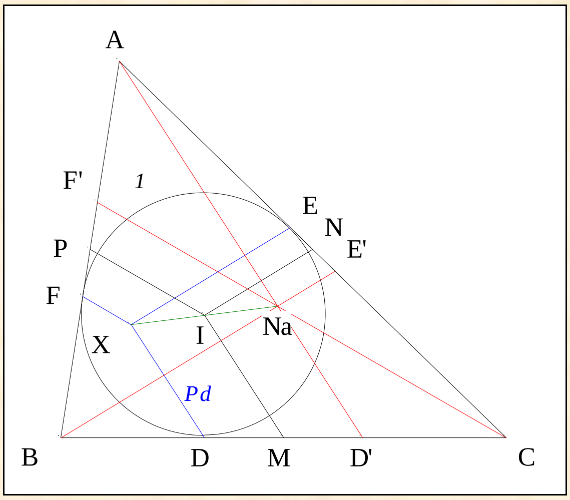
- **Scolie :** D', E', F' sont les points de contact des A, B, C-excercles de ABC avec (BC), (CA), (AB).

- D'après "Le point de Nagel"[6], (AD'), (BE') et (CF') sont concourantes au point de Nagel.

- Notons Na ce point de concours.

- D'après A. 3. Milieu d'une gergonnienne, (AD') // (A'I) ;
  par hypothèse, (AI) // *Pd* ;
  par transitivité de la relation //, (AD') // *Pd*.

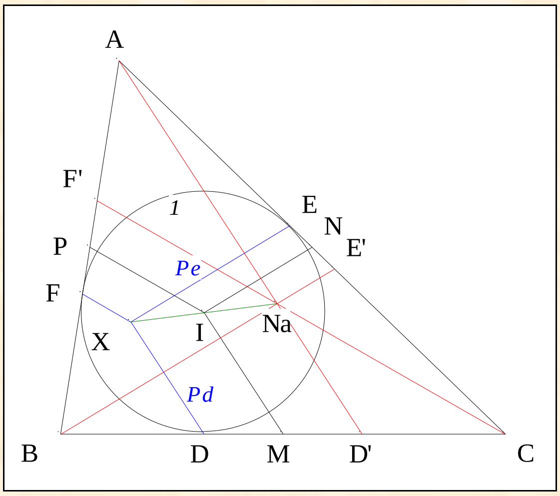
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AE') // *Pe* et (AF') // *Pf*.



- Notons X le point d'intersection de (INa) et *Pd*.

- **Scolies :** **(1)** D et D' sont isotomiques relativement à [BC]
  (2) *Pd* passe par X

- D'après l'axiome de passage IIIb, I est le milieu de [XNa].



- En considérant l'axe médian du trapèze E'NaIN, (EX) // (BNaE') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (EX) = *Pe* ;
  en conséquence, *Pe* passe par X.

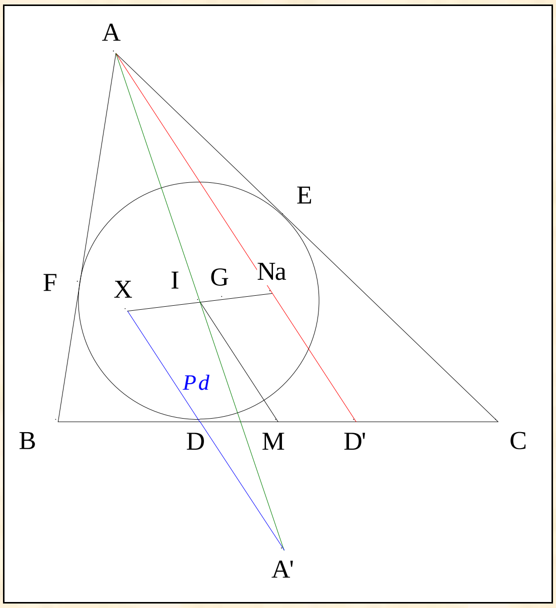
---

6 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol.3, p. 8-10 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Pf* passe par X.

- **Conclusion :** *Pd*, *Pe* et *Pf* sont concourantes.

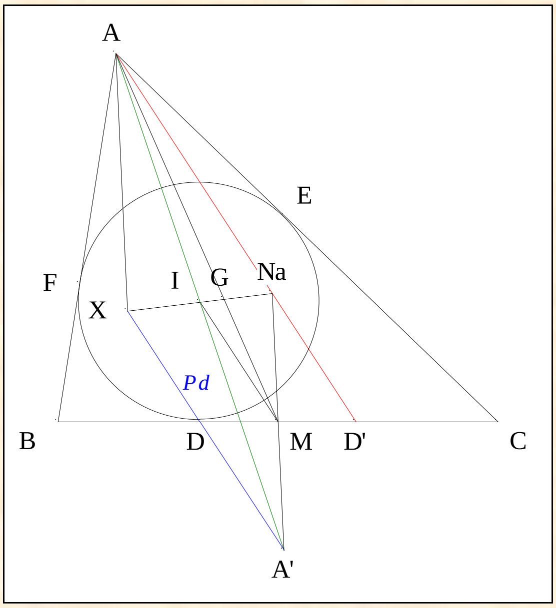
Scolie :



- Notons A' le symétrique de A par rapport à I
  Et G le point médian de ABC.

- D'après "Cinq théorèmes de Nagel"[7], Na, G et I sont alignés ;
  en conséquence, (GI) passe par X.

- (IM) étant l'axe médian de la bande de frontières (A'D) et (DX), A' est sur (DX).



- Le quadrilatère AXA'Na ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;

7 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol.**3**, p. 7 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

en conséquence, (AX) // (A'Na).

- G étant le point médian du triangle AA'Na, M est le milieu de [A'Na].

(IM) étant l'axe médian de la bande de frontières (A'D) et (DX),

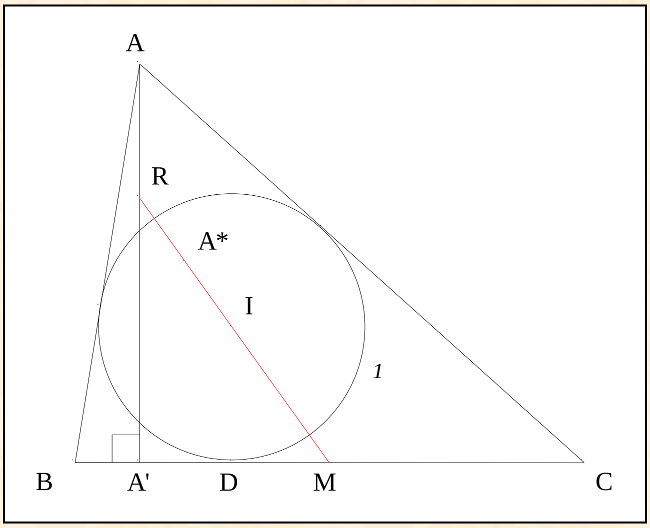
- **Conclusion :** (AX) est parallèle à (A'M).[8]

B. LE POINT R D'UNE HAUTEUR

1. Le rayon du cercle inscrit

VISION

Figure :

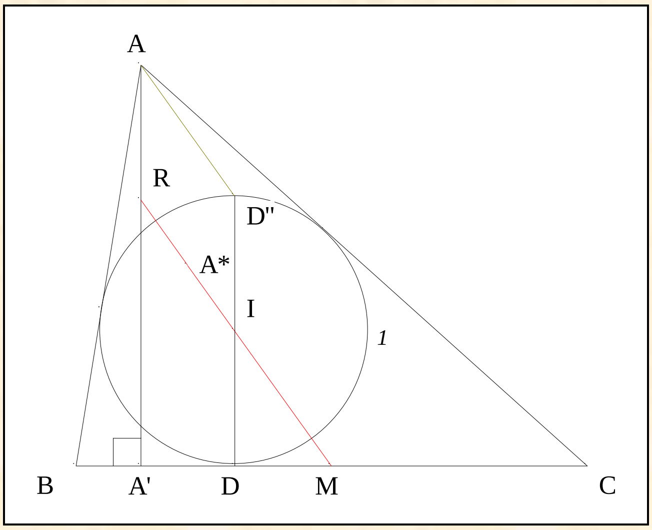


Traits : aux hypoyhèses et notations précédentes, nous ajoutons
A' le pied de la A-hauteur de ABC
et R le point d'intersection de (MI) avec la A-hauteur (AA').

Donné : AR = IP.

VISUALISATION

[8] IRAN National Math Olympiad (3rd round)-2010-Geometry exam- pb 5, *Mathlinks* du 07/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=360730.



- Notons D" l'antipôle de D relativement à *1*.

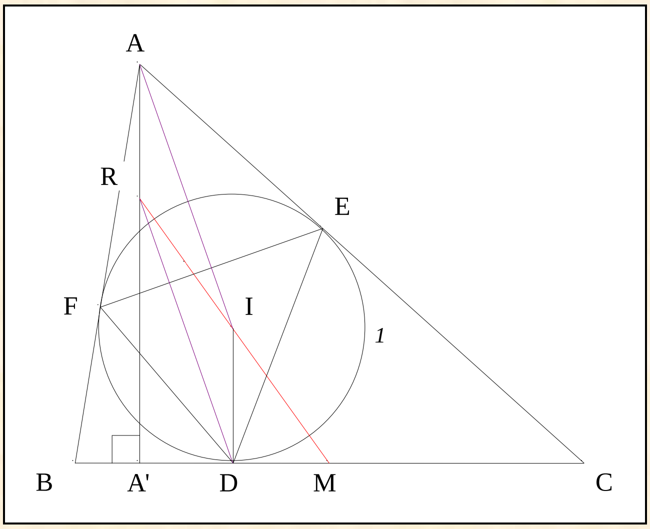
- **Scolies :** **(1)** ID" est le rayon de *1*
  (2) (ARA') // (DID")

- D'après A. 3. Milieu d'une gergonnienne, (AD") // (MIR).

- Le quadrilatère ARID" ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme;
  en conséquence, AR = ID".
  nous avons : ID" = ID.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, AR= ID.

Scolie : une autre nature de R



- Notons DEF le triangle de contact de *1* de ABC.

- Le quadrilatère ARDI ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme;
  en conséquence, (DR) // (AI) ;
  nous avons : (AI) $\perp$ (EF).

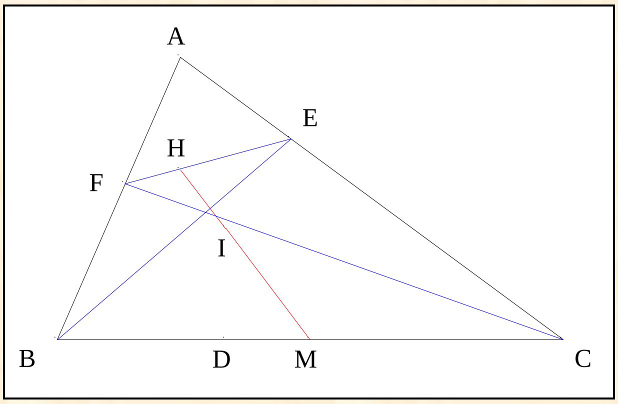
- D'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (DR) $\perp$ (EF).

- **Conclusion :** (DR) est la D-hauteur de DEF.

2. Un problème de *KöMal*

VISION

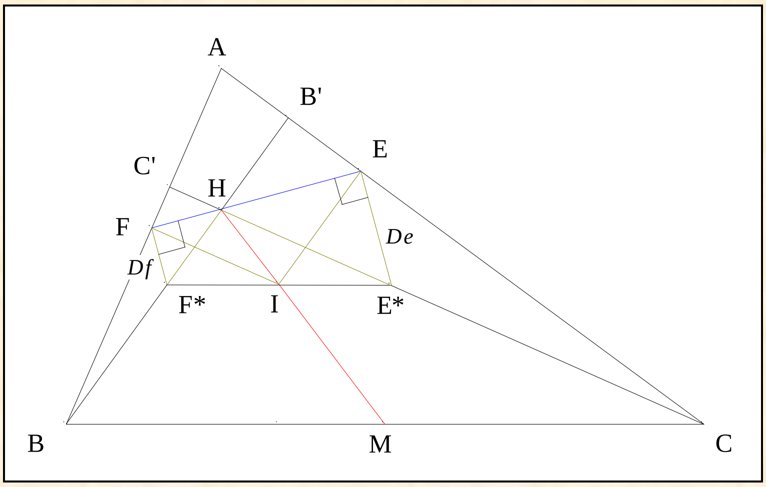
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	M	le milieu de [BC]
et	H	l'orthocentre de ABC.

Donné : *si,* H est sur (EF) *alors,* M, I et H sont alignés. [9]

VISUALISATION



- Notons B', C' les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC,
  De , *Df* les perpendiculaires à (EF) resp. en E, F
  et D*, F* les points d'intersection de *Df* et (BB'), de *De* et (CC').

9 *Kvant* est une revue russe de mathématiques.

- D'après Goormaghtigh "Une parallèle à (BC)" (Cf. Appendice 2) , (E*F*) // (BC).

- D'après Pappus "Le petit théorème" appliqué à l'hexagone FIEE*HF*F, E*, I et F* sont alignés.

- D'après le théorème de la médiatrice, (AI) est la médiatrice du segment [EF] ;
  en conséquence, (AI) est l'axe médian de la bande de frontières *De* et *Df* ;
  d'après l'axiome de passage IIIb, I est le milieu de [E*F*].

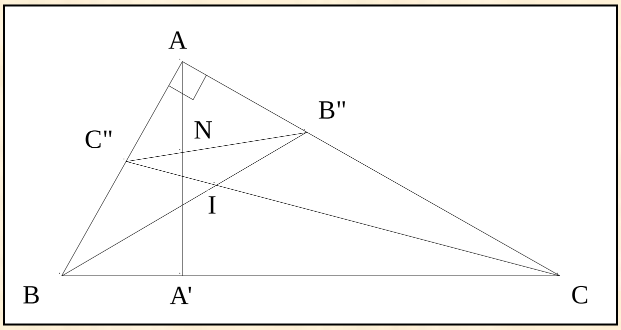
- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 1) appliqué au trapèze BCE*F*,
  M, I et H sont alignés.

Note historique : il y a plus de cent ans que Daniel Arany, professeur au lycée de Györ (Hogrie) décida de fonder un journal de Mathématiques destinée au élèves du secondaire. Le premier journal parut le 1er janvier 1894. Depuis plus de 40 ans, tous les nouveaux problèmes apparaissent en Anglais et en Hongrois.

3. Rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle

VISION

Figure :

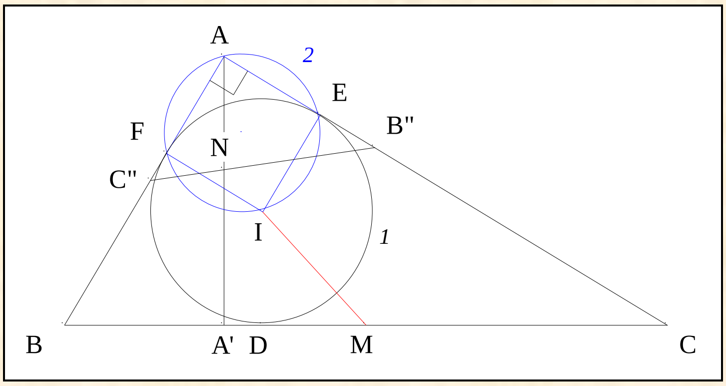


Traits : ABC un triangle A-rectangle,
I le centre de ABC,
B", C" les points d'intersection de (BI) et (CA), de (CI) et (AB),
A' le pied de la A-hauteur de ABC
et N le point d'intersection de (AA') et (B"C").

Donné : AN est le rayon du cercle inscrit dans ABC. [10]

VISUALISATION

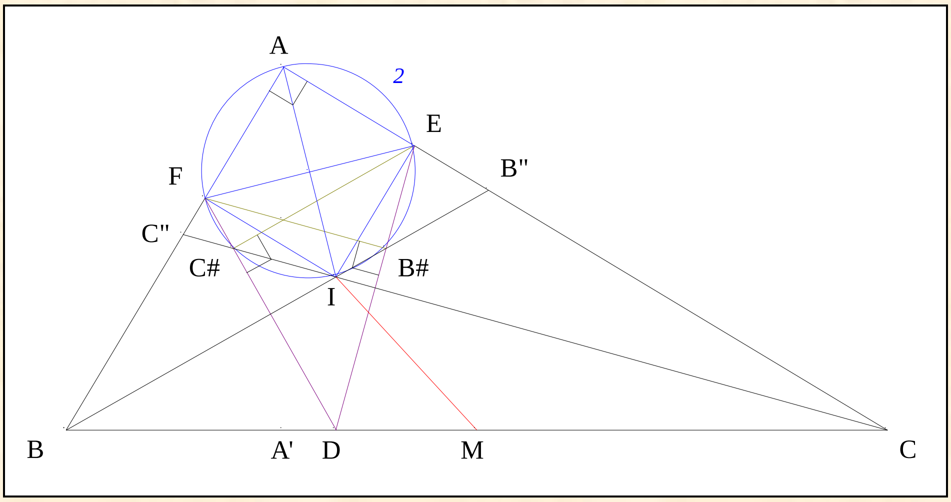
[10] Barroso Campos R., Message *Hyacinthos*.



- Notons M le milieu de [BC],
  1 le cercle inscrit de ABC
  et DEF le triangle de contact de ABC.

- Le carré AFIE est cyclique.

- Notons *2* ce cercle.

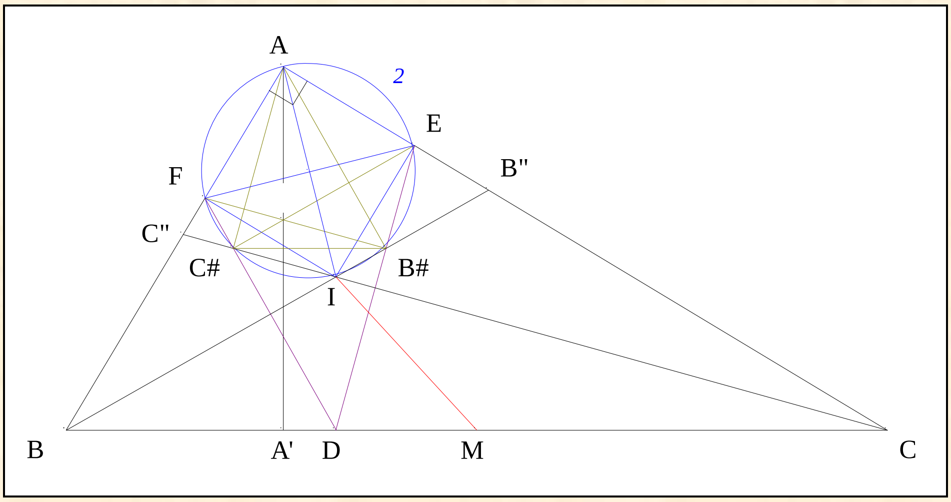


- Notons B#, C# les points d'intersection resp. de (BB") et (DE), de (CC") et (DF).

- D'après Lascases "An Unlikely Concurrence"[11], (AB#) ⊥ (BIB") et (AC#) ⊥ (CIC") ;
  en conséquence, B# et C# sont sur le cercle *2* de diamètre [AI] ou [EF].

- **Conclusion partielle :** (EC#) et (FB#) sont resp. les E, F-hauteurs de DEF.

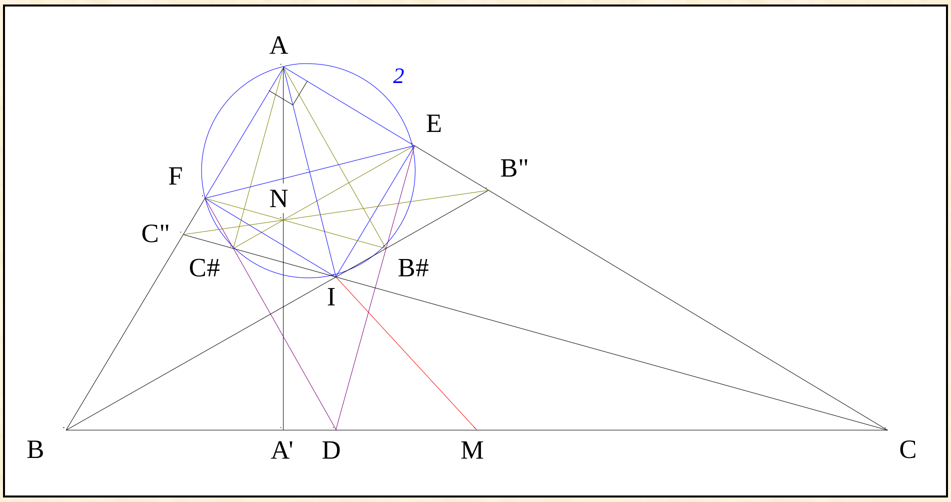
[11] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, vol.4, p.3-5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- **Scolie :** (EC#) et (FB#) sont resp. les B#, C#-hauteurs de AB#C#.

- Par hypothèse, (AA') ⊥ (BC) ;
  d'après Lascases "An Unlikely Concurrence"[12], (BC) // (B#C#) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA') ⊥ (B#C#).

- **Conclusion partielle :** (B#F) et (C#E) sont concourantes sur (AA').



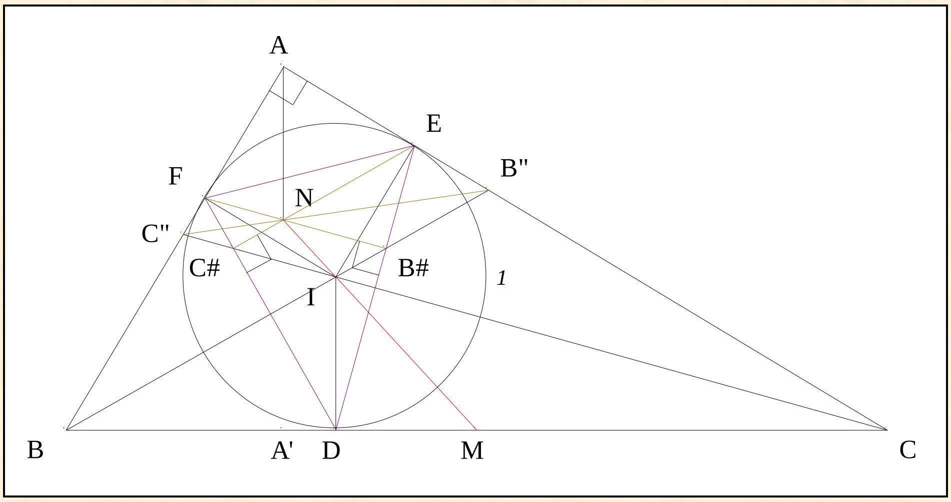
- (CBD) étant l'arguésienne des triangles EB"B# et C#C"F sont perspectifs ;
  d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [13],
  (EC#), (B"C") et (B#F) sont concourantes sur (AA') i.e. en N.

- **Conclusion partielle :** N est l'orthocentre de DEF.

- **Scolies :**
  (1) N est l'orthocentre de AB#C#
  (2) ABC est le triangle tangentiel de DEF
  (3) M est le centre du cercle circonscrit à ABC.

---

12 Ayme J.-L., An unlikely concurrence, vol.4, p.3-5 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
13 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. , p. ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- D'après "Le résultat de Gob"[14], M, I et N sont alignés.

- **Conclusion :** d'après B. 1. Un rayon du cercle inscrit, AN est le rayon du cercle inscrit dans ABC.

Scolie : (MIN) est la droite d'Euler de ABC.

Note historique : d'après mes références, le professeur Riccardo Barroso Campos de l'université de Séville (Espagne) a proposé une variante de cette question en 2003 au sein du groupe *Hyacinthos*.

M étant le milieu du côté [BC] d'un triangle ABC, I son centre et A"B"C" son triangle I-cévien
si, le point d'intersection de (MI) avec la A-hauteur de ce triangle est sur la droite (B"C")
alors, ABC est A-rectangle.

Deux solutions en ont été données :
une angulaire par Nikolaos Dergiades et
une métrique par Ricardo Barroso dans une communication personnelle.

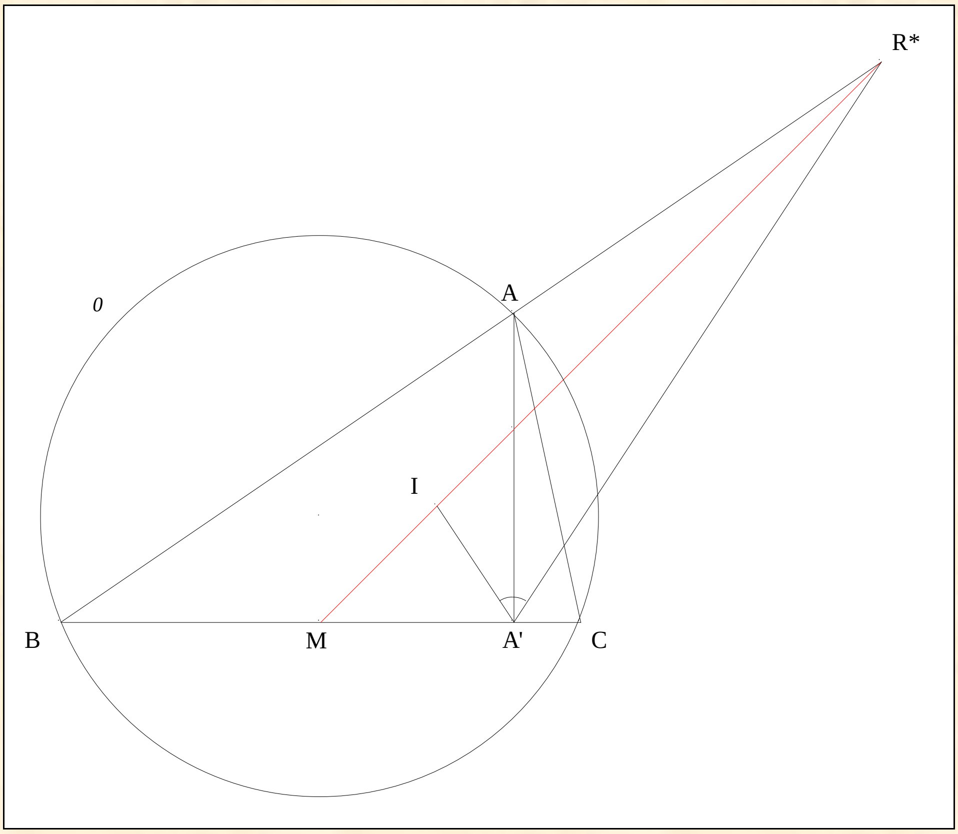
Commentaire : la preuve ci-dessus donne plus d'informations sur la nature géométrique des points.

4. Un résultat de Virgil Nicula

VISION

Figure :

[14] Ayme J.-L., Droite Simson de pôle Fe, G.G.G. vol. 6, p. 12-16 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

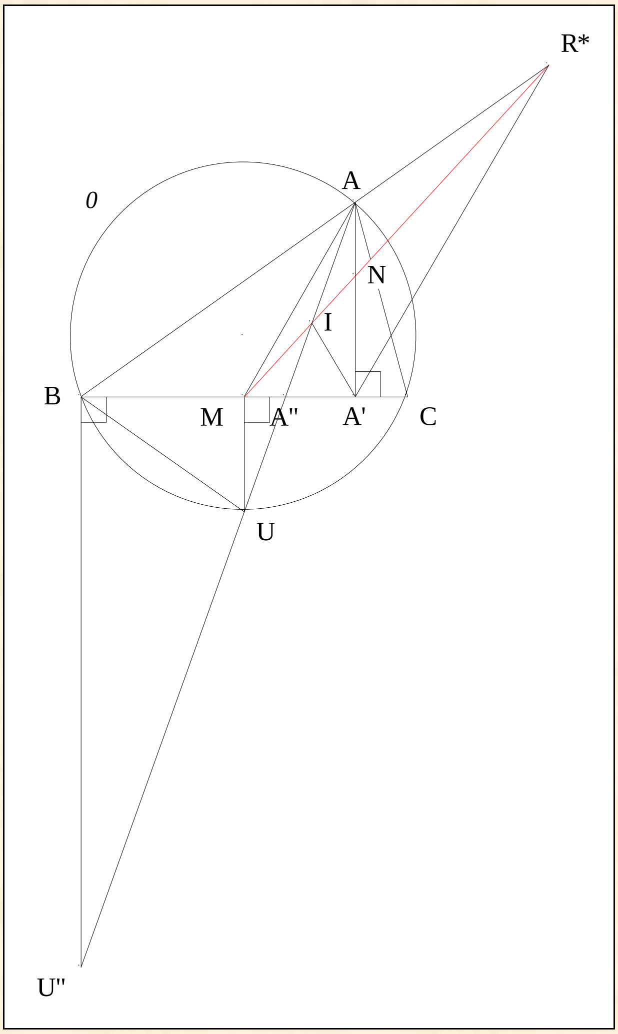


Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : <BAC = 2.<CBA
si, et seulement si,
les angles géométriques <AA'I et <R*A'A sont égaux.[15]

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[15] Nicula V., Equal angles, *Mathlinks* du 25/07/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=288995.



- Notons A" le pied de la A-bissectrice intérieure avec (BC),
  U le second perpoint de ABC,
  U" le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) en B avec (AU)
  et N le point d'intersection de (AA') et (MI).

- **Scolie :** (AU) passe par I.

- Une chasse angulaire à 2. π près :
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <UBC = <UAC ;
  (AIU) étant la A-bissecrice de ABC, <UAC = <BAU ;
  par hypothèse, <BAU = <CBA ;
  par transitivité de la relation =, <UBC = <CBA.

- **Conclusion partielle :** (BC) et (BU") sont les B-bissectrices intérieure et extérieure de <UBA.

- La quaterne (A, U, A", U") est harmonique.

- Par projection sur (BC), la quaterne (A', M, A", B) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (A ; A', M, A", B) est harmonique ;
  il s'en suit que la quaterne (N, M, I, R*) est harmonique.

- Deux des quatre rayons de cette dernière quaterne harmonique étant perpendiculaires,
  ces deux rayons sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle déterminé par les deux autres rayons.

- **Conclusion :** les angles géométriques <AA'I et <R*A'A sont égaux.

VISUALISATION SUFFISANTE

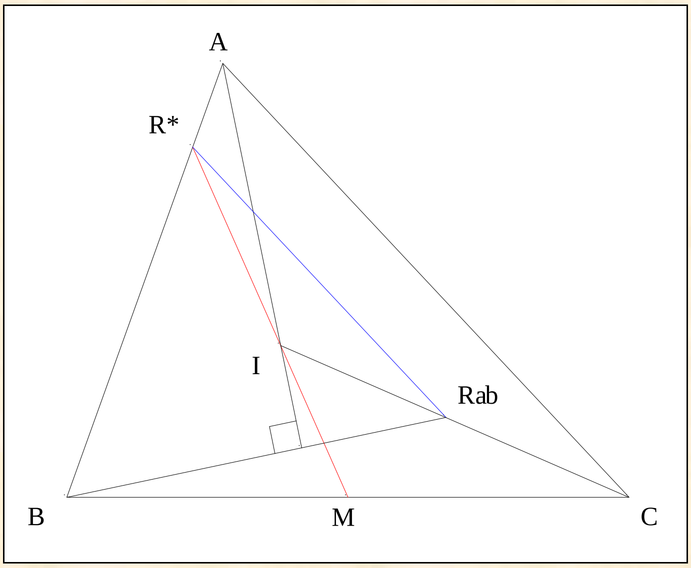
Elle est laissée aux bons soins du lecteurs

C. LE POINT R* D'UN CÔTÉ

1. Le résultat de Toshio Seimiya

VISION

Figure :

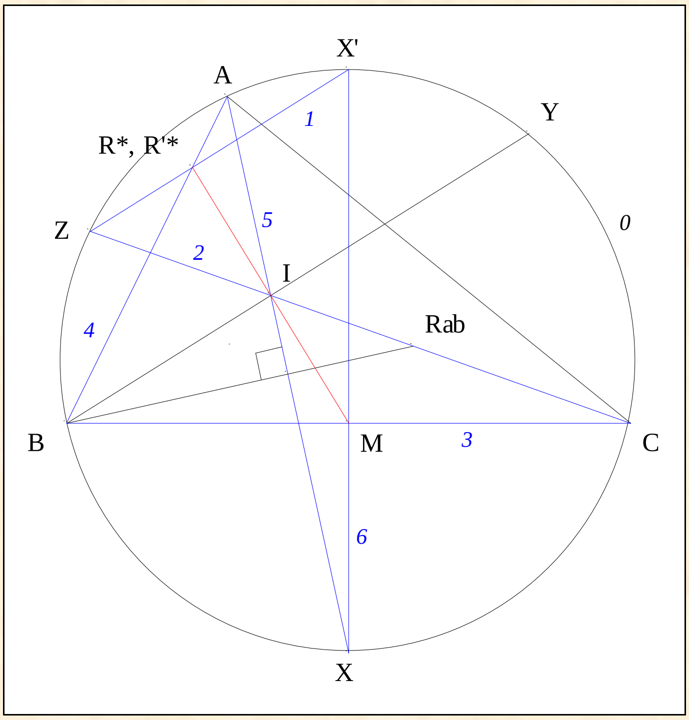


Traits :	ABC	un triangle tel que AB < AC,
	I	le centre de ABC,
	M	le milieu de [BC],
	R*	le point d'intersection de (MI) et (AB),
	*D*b	la perpendiculaire à (AI) issue de B
et	Rb	le point d'intersection de *D*b et (CI).

Donné : (R*Rab) et (AC) sont parallèles. [16]

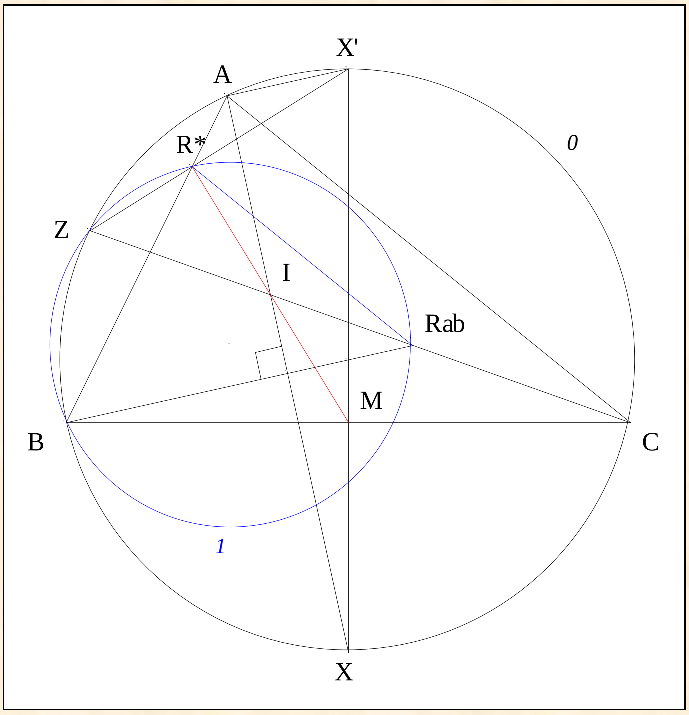
VISUALISATION

[16] Seimiya T., Problème 2915 *Crux Mathematicorum* vol 30, (2) (2004) 106 ; http://www.math.ca/crux/.



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC,
  X, Y, Z les seconds points d'intersection de (AI), (BI), (CI) avec *0*,
  X' l'antipôle de X sur *0*
  et R'* le point d'intersection de (ZX') et (AB).

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 2),
  (D'IM) est la pascale de l'hexagone cyclique X'ZCBAXX' ; en conséquence, D et D' sont confondus.



- D'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle", (AX) $\perp$ (AX').

- Une chasse angulaire à π près :
  nous avons <RabZR* = <CZX'

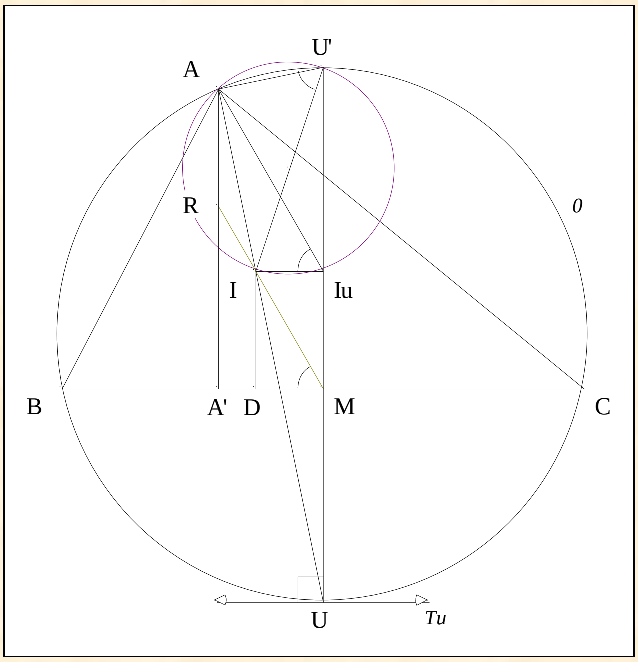
d'après le théorème de l'angle inscrit, <CZX' = <CAX' ;
par transitivité de la relation =, <RabZR* = <CAX' ;

<CAX' et <RabBA ayant le même angle complémentaire (<BAX = <XAC), sont égaux ;
en conséquence, Z, B, R* et Rab sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

- **Conclusion :** les cercles *1* et *0*, les points de base B et Z, les moniennes (R*BA) et (RabZC), conduisent au théorème **0** de Reim ;
il s'en suit que (R*Rab) et (AC) sont parallèles.

Scolie : deux angles égaux [17]



- Notons Iu le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (U'M)
et *Tu* la tangente à *0* en U.

- **Scolie :** *Tu* // (Iiu).

- Le cercle *0*, les points de base A et U', les moniennes naissantes (UAI) et (UU'Iu), les parallèles *Tu* et (IIu), conduisent au théorème **1"** de Reim ; en conséquence, A, I, Iu et U' sont cocycliques.

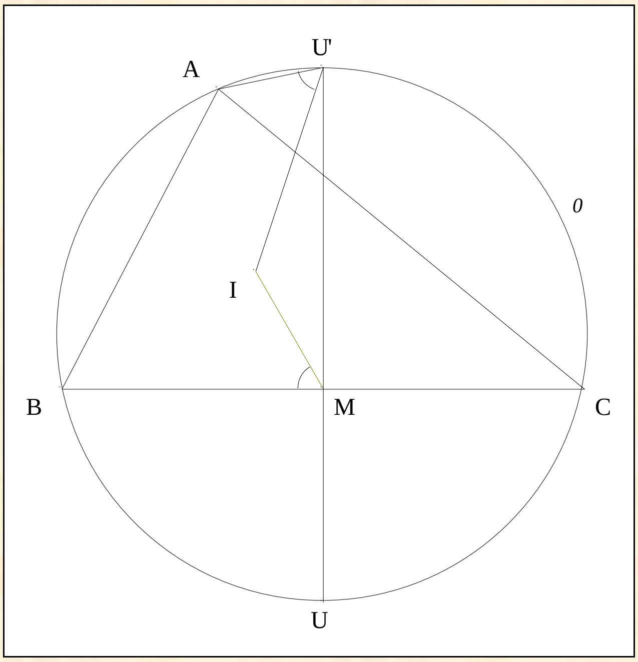
- D'après le théorème de l'angle inscrit, <AU'I = <AIuI.

- Le quadrilatère IDMIu étant un rectangle, MIu = ID ;
d'après A. 4. Le rayon du cercle inscrit, ID = AR ;
par transitivité de relation =, Miu = AR.

- Le quadriltère ARMIu ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
en conséquence, (AIu) // (IM).

- D'après le théorème des angles à côtés parallèles, <AIuI = <IMB.

[17] Badzyan A..



- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <AU'I = <IMB.

2. Une courte biographie de Toshio Seimiya

Toshio Seimiya est né le 30 mars 1910 à Tokyo (Japon).
A l'âge de quatorze ans, il apprend le théorème de Pythagore et découvre de nouvelles preuves. Deux plus tard, il découvre une généralisation de la droite de Newton, la "droite de Seimiya".[18]
En 1931, il entre à l'université impériale de Tokyo, en sort en 1934 pour commencer à enseigner les mathématiques à l'Académie militaire qu'il quitte en 1945. Quatre années plus tard, il rejoint l'université Gakugei de Tokyo où il enseigne jusqu'à sa retraite en 1973.
Il est connu pour avoir écrit de nombreux articles dans *Shoto Sugaku* et *CruxMathématicorum*. Aujourd'hui encore, il propose et résout de nombreux exercices de géométrie.
Actuellement, il vit à Kawasaki (Japon).

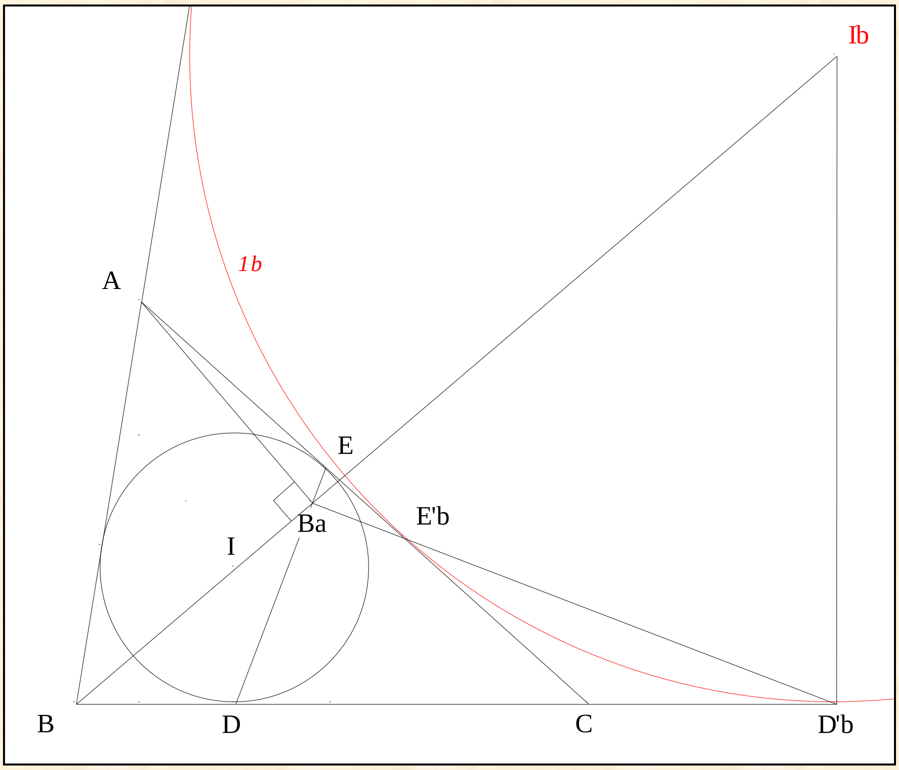
D. ENCORE AVEC LE POINT R D'UNE HAUTEUR

1. An unlikely concurrence

VISION

Figure :

[18] Ayme J.-L., La droite de Seimiya, G.G.G. vol.3 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

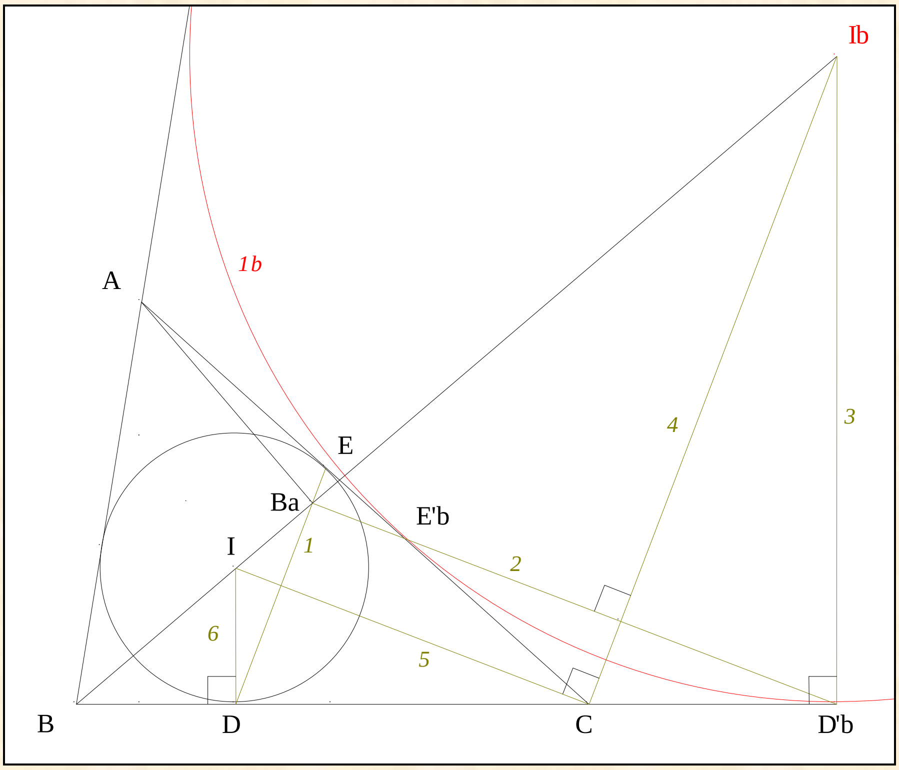


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

	Ba	le point de (DE) où
		la B-bissectrice de ABC se brise perpendiculairement et passe par A,
	1b	le B-excercle de ABC,
	Ib	le centre de *Ib*,
et	D'b, E'b	les points de contact de *1b* resp. avec (BC), (CA).

Donné : Ba, D'b et E'b sont alignés.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** (ID) // (IbD'b)
  (2) (DBaE) // (CIb)
  (3) (D'bE'b) // (CI).

- D'après Pappus "Le petit théorème"[19]
  appliqué à l'hexagone sectoriel DBaD'bIbCID, (CI) // (BaD'b) ;
  par transitivité de la relation //, (D'bE'b) // (BaD'b) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (D'bE'b) = (BaD'b).

- **Conclusion :** Ba, D'b et E'b sont alignés.

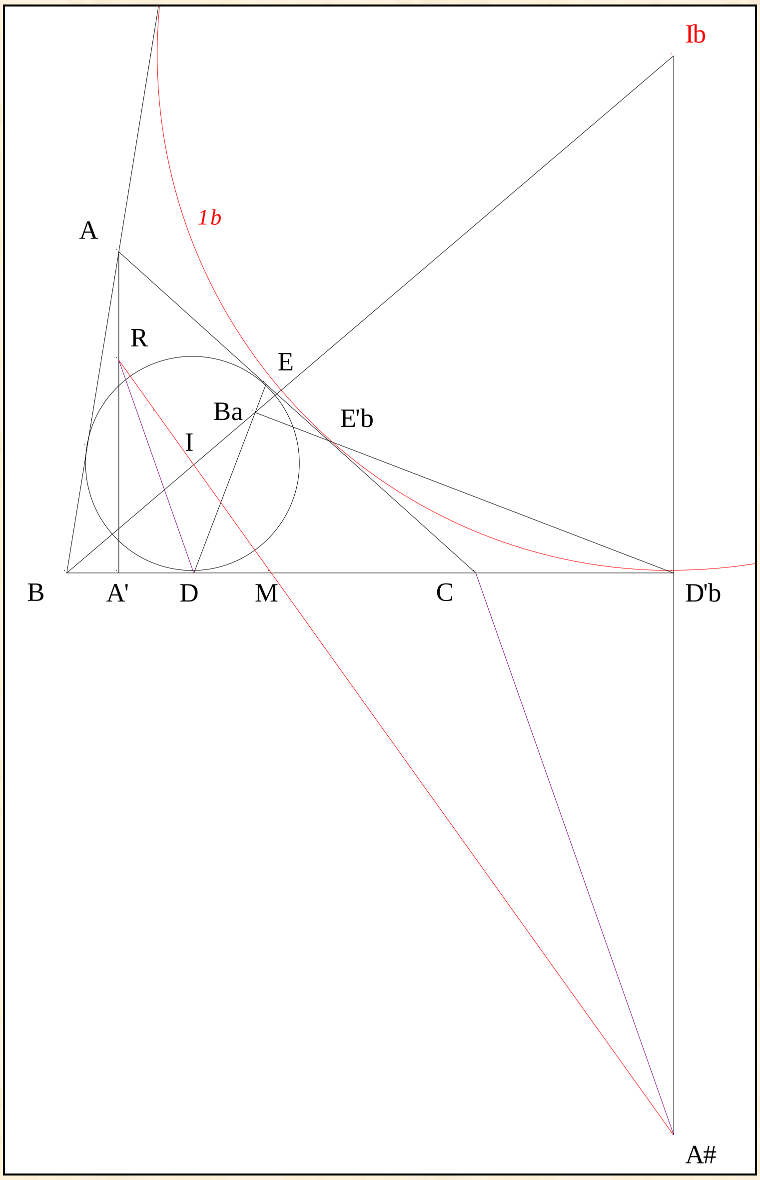
Commentaire : ce résultat est à ajouter à ceux de l'article intitulé "An unlikely concurrence, revisited and generalizated".[20]

2. Des résultats de l'auteur

VISION

Figure :

19 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. , p. ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
20 Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, G.G.G. vol. , p. ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

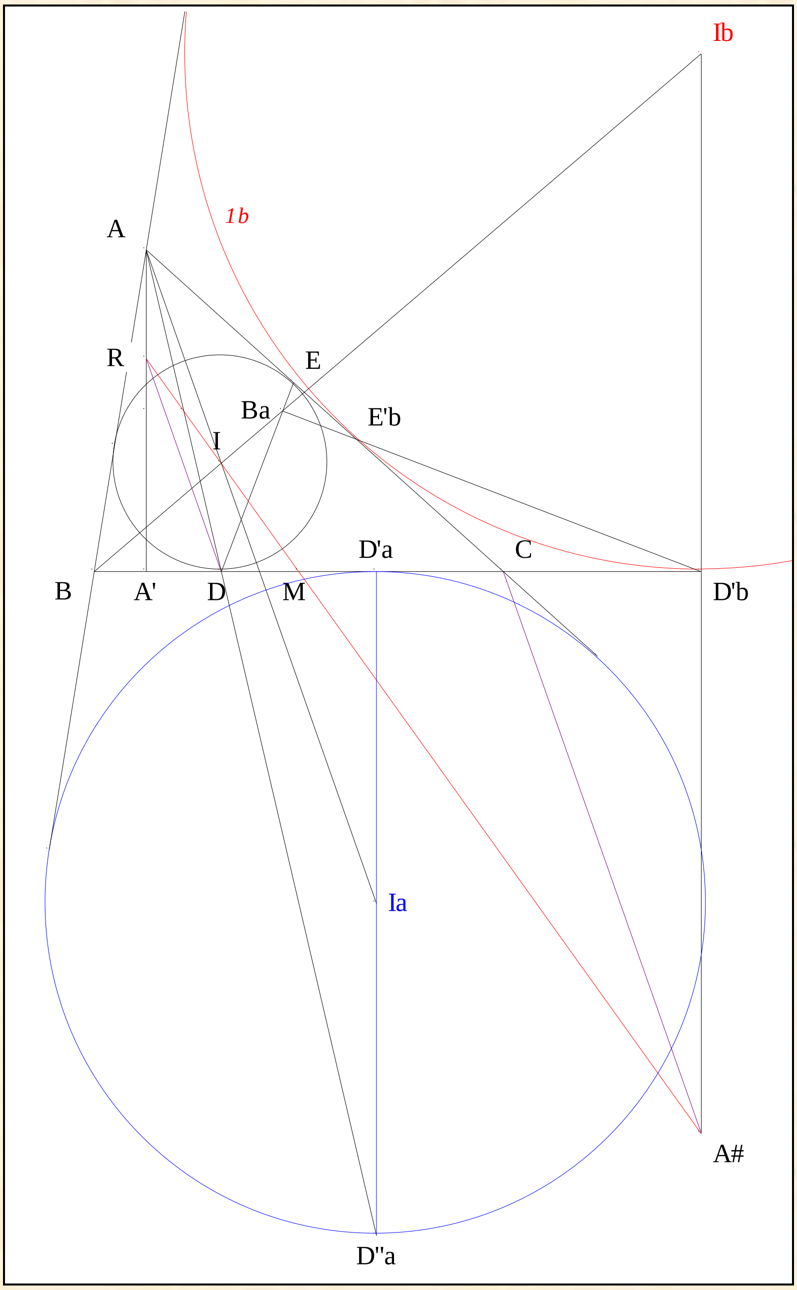


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A# le point d'intersection de (IbD'b) et (MI).

Donné : (A#C) est parallèle à (DR).[21]

VISUALISATION

[21] Ayme J.-L., Two interesting parallels, *Mathlinks* du 06/06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=351735.



- Notons $1'a$ le A-excercle de ABC,
  Ia le centre de $1'a$,
  D"a l'antipôle de D'a relativement à $1'a$,
  h_a , r_a la longueur de la A-hauteur de ABC,
  r_a le rayon de $1'a$
  et p le demi périmètre de ABC.

- **Scolies :** **(1)** deux formules concernant l'aire S de ABC ; $2.S = a.h_a = (p-a)\ r_a$.
  (2) D et D'a sont isotomiques relativement à [BC].
  (3) CD'b = CE'b = p-a.

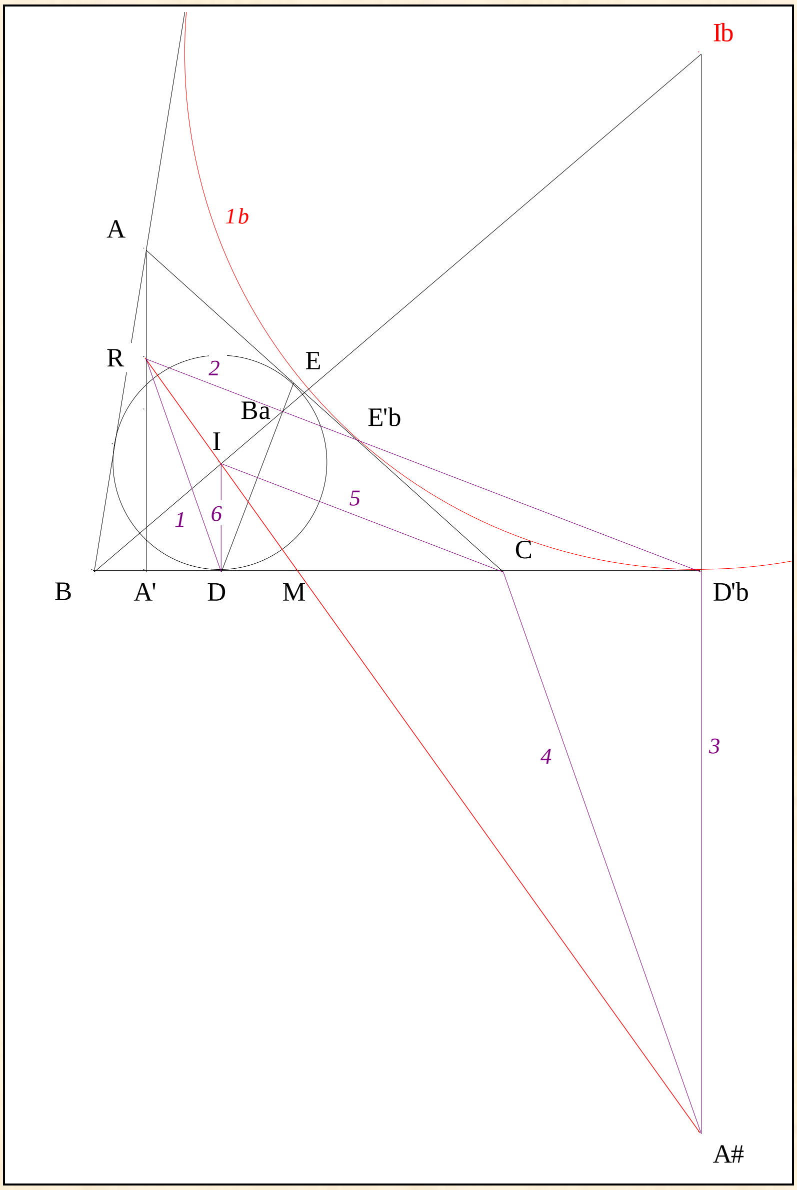
- Les triangles DAA' et DD"aD'a étant homothétiques, $DA' / DD'a = h_a / 2r_a = (p-a) / a$;
  sachant que DD'a = 2.DM,
  $DA' / DM = h_a / r_a = 2.(p-a) / a$;
  il s'en suit que $2.(p-a) / a = CD'b / CM$;
  par transitivité de la relation =, $DA' / DD'a = DA' / DM$.

- Les triangles RA'M et A#D'bM étant homothétiques, D et C sont deux points correspondants.

- **Conclusion :** (A#C) est parallèle à (RD).

Remerciements : à Luis Gonzalez, l'étudiant ingénieur dans le domaine du pétrole pour son aide concernant ce résultat.

Scolies : **(1)** une conséquence inattendue avec le point R



- D'après Pappus "Le petit théorème" [22],
  appliqué à l'hexagone DRD'bA#CID, inscrit dans (BC) et (RM), (D'bR) // (CI) ;
  nous savons que (CI) // (D'bE'bBa) ;
  par transitivité de la relation //, (D'bR) // (D'bE'bBa) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (D'bR) = (D'bE'bBa).

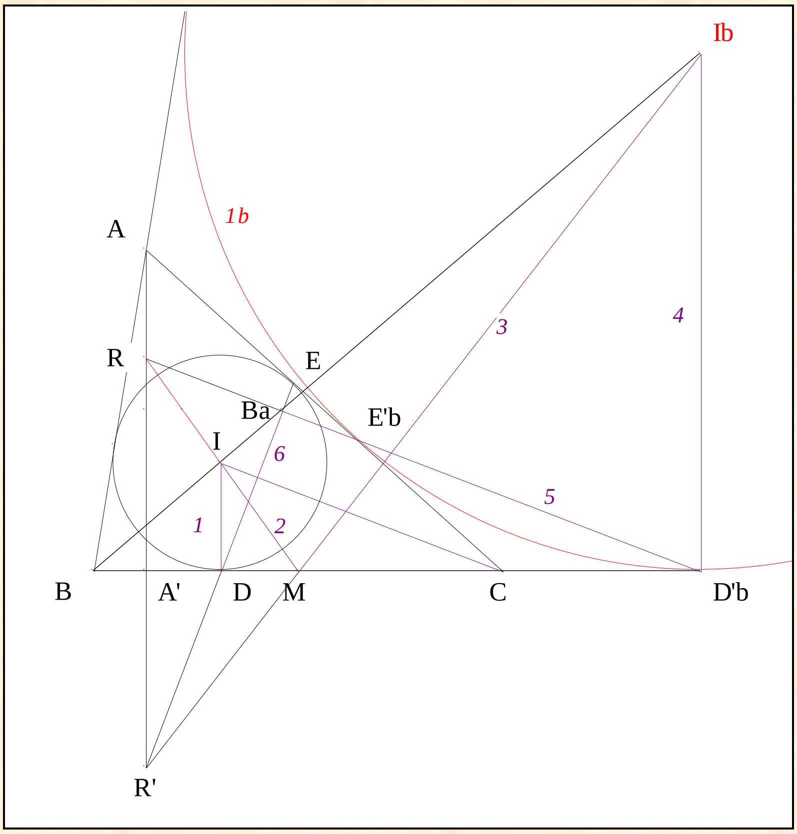
- **Conclusion :** (D'bE'bBa) passe par R. [23]

---

[22] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol.6 , p.2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

Commentaire : une autre approche de ce résultat peut être obtenu à partir du triangle d'Hadamard.

(2) Intersection sur la A-hauteur de ABC



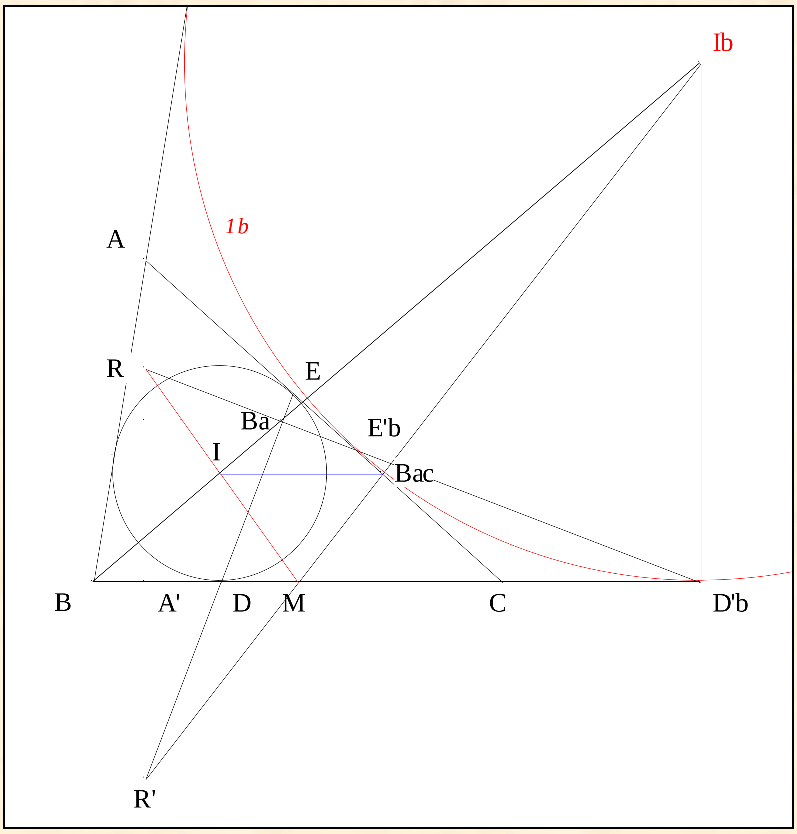
- Notons R' le point d'intersection de (DBa) et (MIa).

- D'après Pappus "Le petit théorème" [24],
appliqué à l'hexagone DIMIaD'bBaD, inscrit dans (BC) et (BIIa), **(1)** (RR') en est la pappusienne
(2) (RR') // (ID).

- **Conclusion :** R' est sur la A-hauteur de ABC.[25]

(3) Une parallèle à (BC)

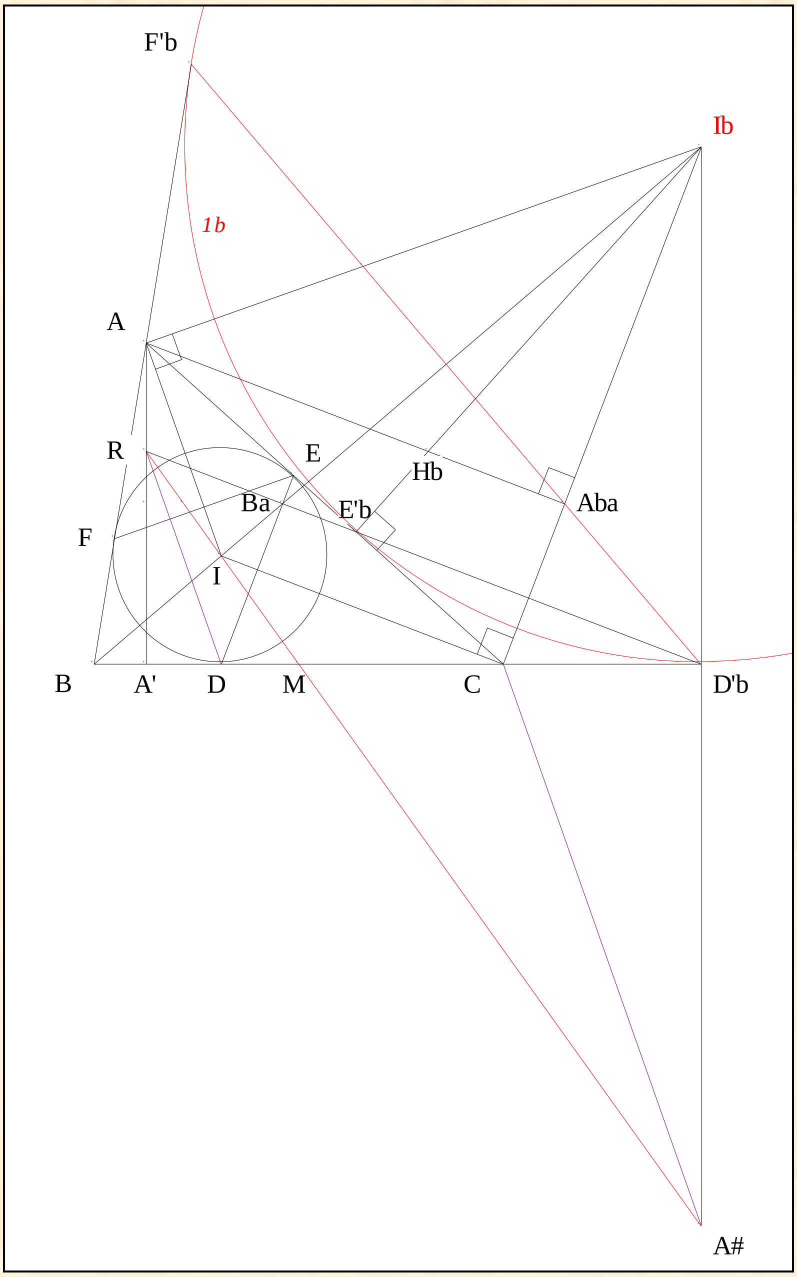
[23] Salazar J. C., *Mathlinks* du 08/01/2005.
[24] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol.6 , p.2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
[25] Ayme J.-L., Intersection on an altitude, *Mathlinks* du 08/06/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=352013.



- Notons Bac le point d'intersection de (AC) et (MIa).

- **Conclusion :** d'après F. Appendice 2, (IBac) est parallèle à (BC).

(4) Un orthocentre



- Par définition, (IbE'b) ⊥ (AC).

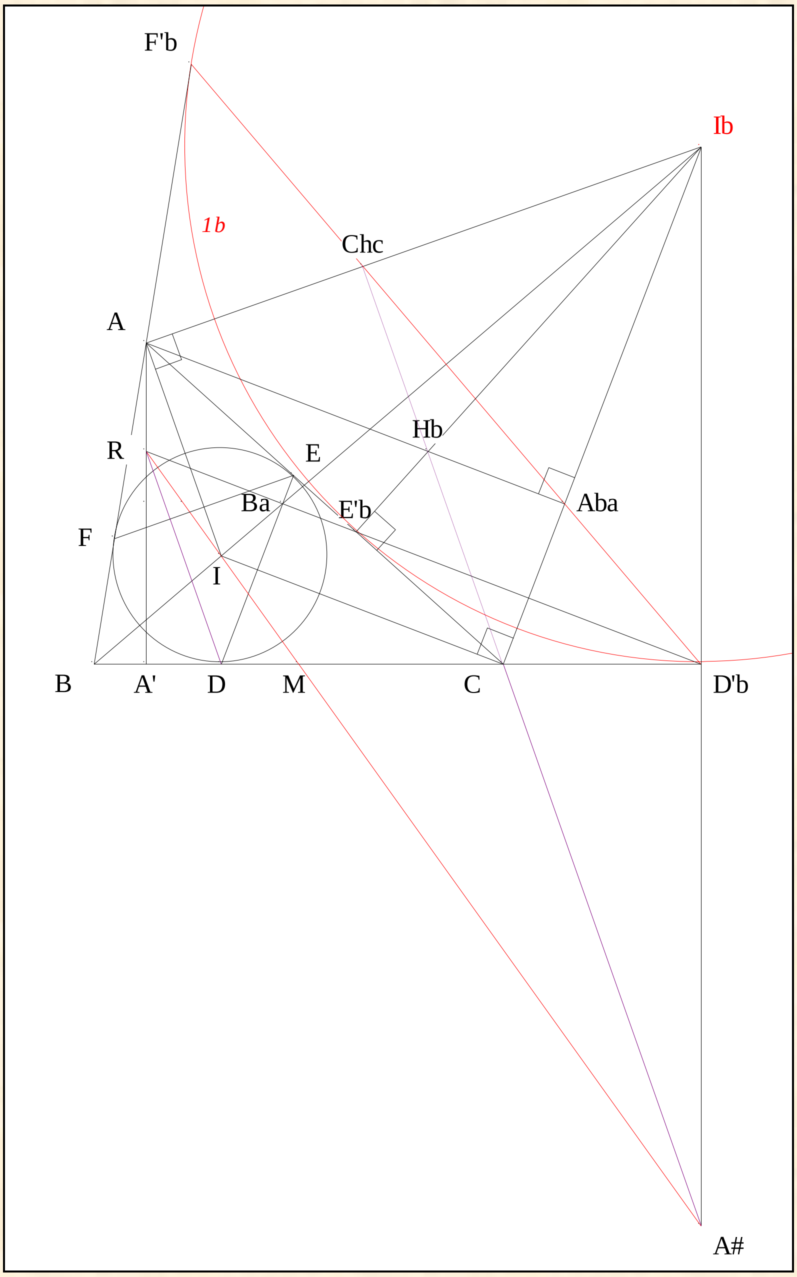
- Notons F'b le point de contact de *1b* avec (AB)
  et Aba le point d'intersection de (CIb) et (D'bF'b).

- D'après Appendice 3 scolie 2, (AAba) ⊥ (CIb).

- Notons Hb le point d'intersection de (AAba) et (IbE'B).

- **Conclusion :** Hb est l'orthocentre du triangle ACIb.

(5) La droite (A#C)



- D'après B. 1. Un rayon du cercle inscrit, scolie 1, (DR) ⊥ (EF) ;
  nous savons que (EF) // (AIb) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (DR) ⊥ (AIb) ou encore (AIb) ⊥ (DR) ;
  d'après D. 2. Des résultats de l'auteur, (DR) // (A#C) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AIb) ⊥ (A#C).

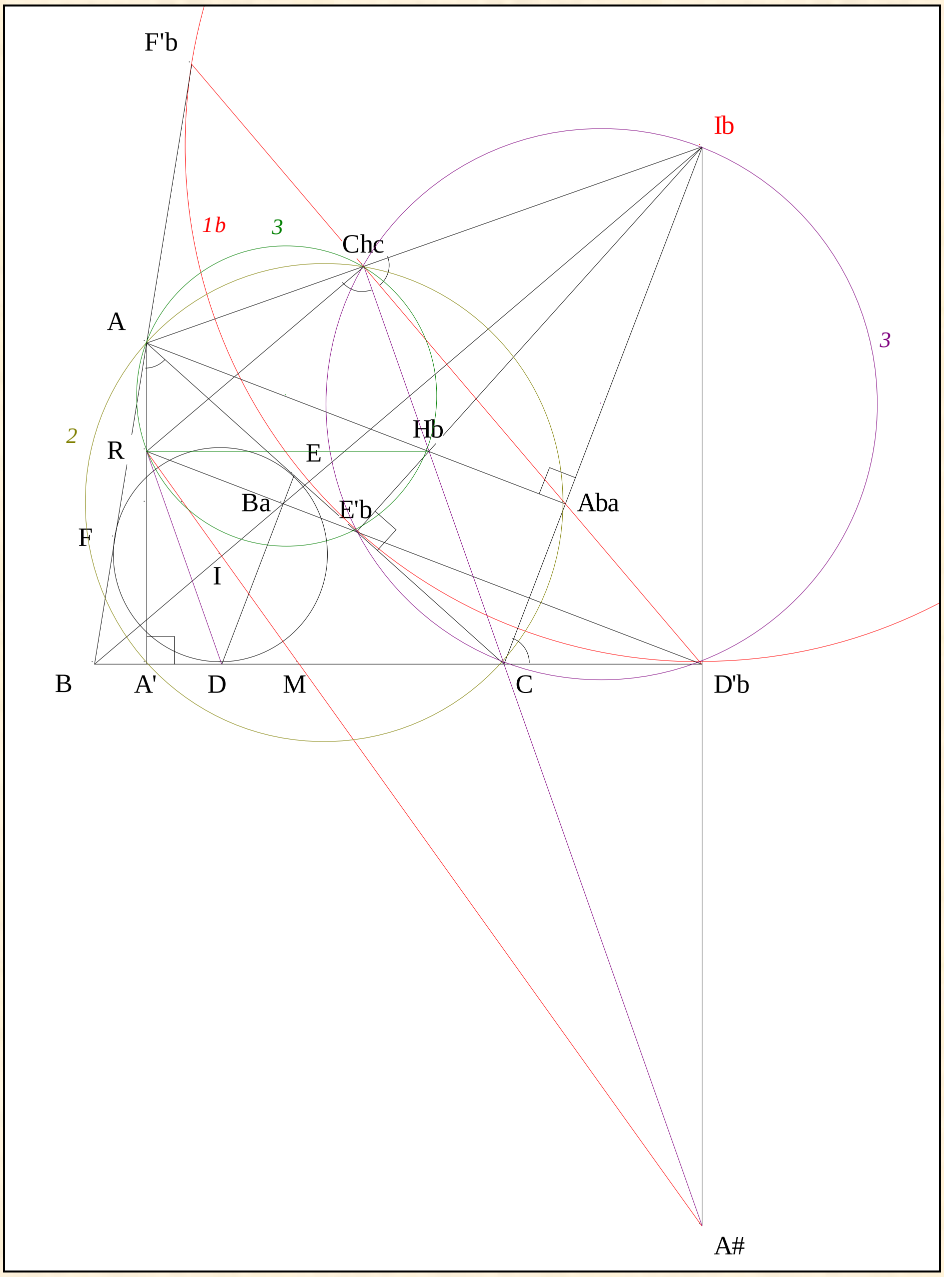
- **Conclusion :** (A#C) est la C-hauteur de ACIb.[26]

- Notons Chc le point d'intersection de (A#C) et (AIb).

- D'après Appendice 3 scolie 2, Chc est sur (D'bF'b).

(6) Encore une parallèle à (BC)

[26] Ayme J.-L., Orthocenter, *Mathlinks* du /06/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=352657.



- Le quadrilatère AA'CChc est cyclique.

- Notons 2 ce cercle
  et 3 le cercle de diamètre [CIb] ; il passe par D'b et Chc.

- Une chasse angulaire à π près :
  nous avons ; <RAHb = <RHAba ;
  d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", <RHAba = <D'bCIb ;
  d'après le théorème de "l'angle inscrit", <D'bCIb = <D'bChcIb ;
  d'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", < D'bChcIb = <RChcHb ;
  par transitivité de la relation =, <RAHb = <RChxHb.
  en conséquence, A, R, Hb et Chc sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.

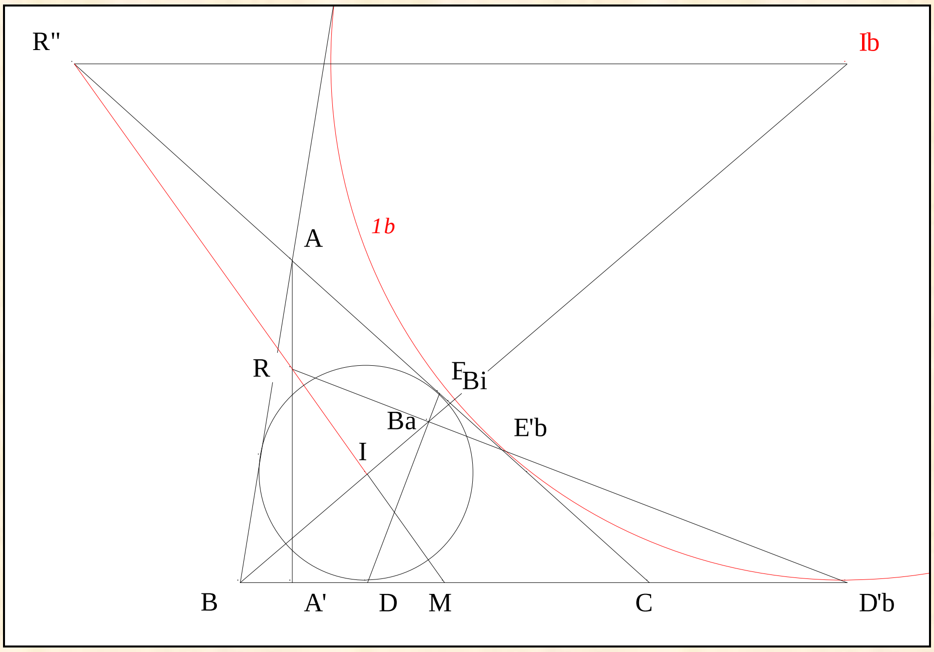
- Les cercles *3* et *2*, les points de base A et Chc, les moniennes (RAA') et (HbChcC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (RHb) // (A'C).

- **Conclusion :** (RHb) est parallèle à (BC).[27]

E. LE POINT R"

VISION

Figure :



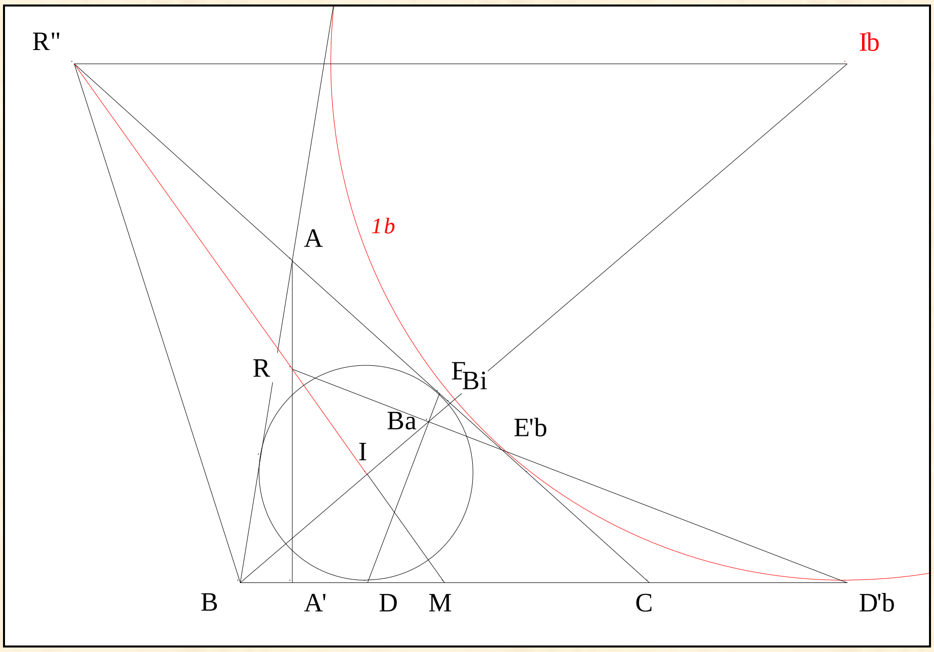
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
R" le point d'intersection de (CA) et (MI).

Donné : (R"Ia) est parallèle à (BC).[28]

VISUALISATION

27 Ayme J.-L., Two nice parallels, *Mathlinks* du /06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=352652.

28 Ayme J.-L. An interesting concurrence, *Mathlinks* du 06/06/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=351841



- Notons Bi le point d'intersection de (BI) et (CA).

- **Scolie :** la quaterne (B, Bi, I, Ia) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (R" ; B, Bi, I, Ia) est harmonique.

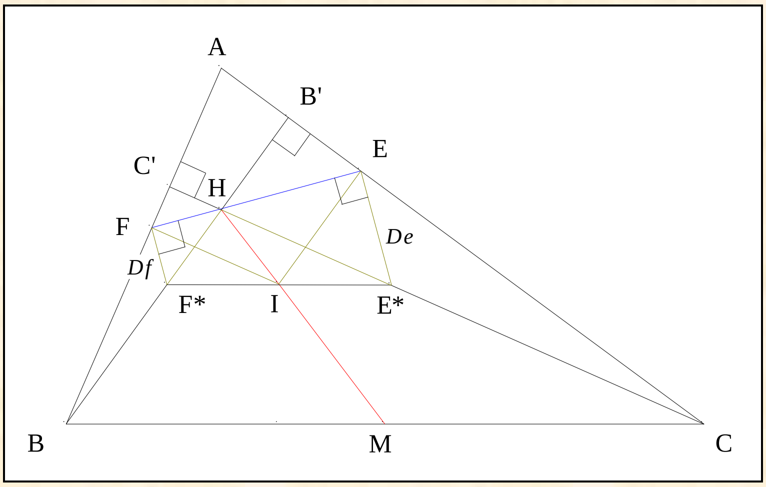
- **Conclusion :** M étant le milieu de (BC), (R"Ia) est parallèle à (BC).

F. APPENDICE

1. Une parallèle à (BC)

VISION

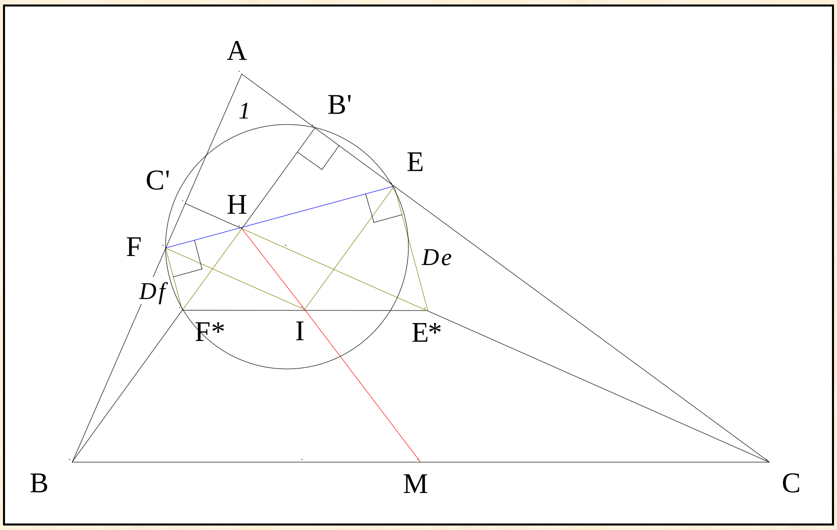
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	B', C'	les pieds resp. de B, C-hauteurs de ABC,
	Dh	une H-ménélienne,
	E, F	les points d'intersection de *Dh* resp. avec (AC), (AB),
	De	la droite perpendiculaire à *Dh* passant par E,
	Df	la droite perpendiculaire à *Dh* passant par F,
	E*	le point d'intersection de *De* et (CH),
et	F*	le point d'intersection de *Df* et (BH).

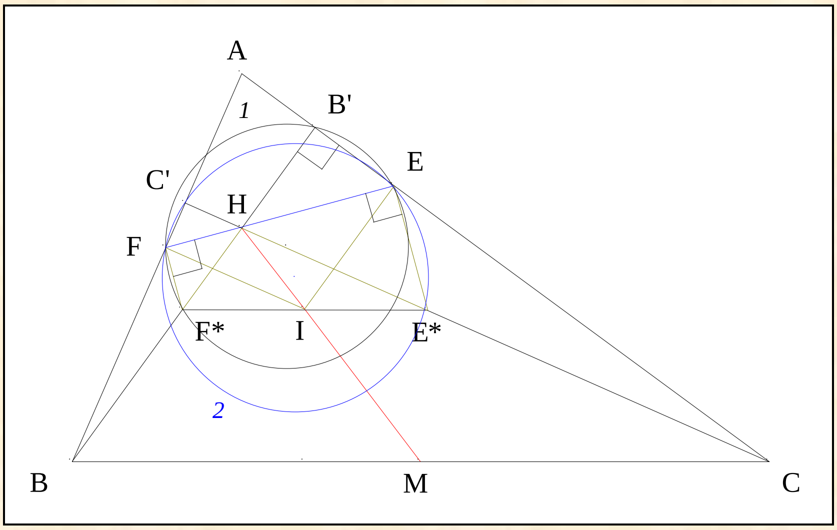
Donné : (E*F*) est parallèle à (BC).

VISUALISATION



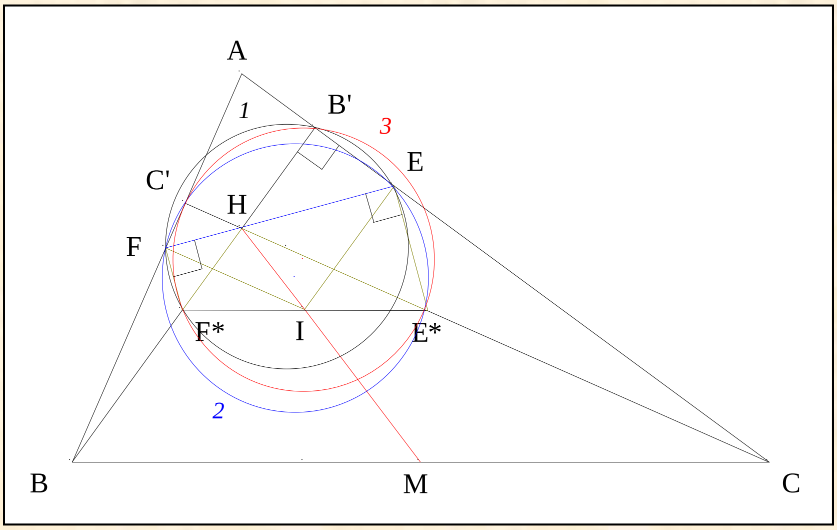
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", F*, F, B', E sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle de diamètre [EF*].



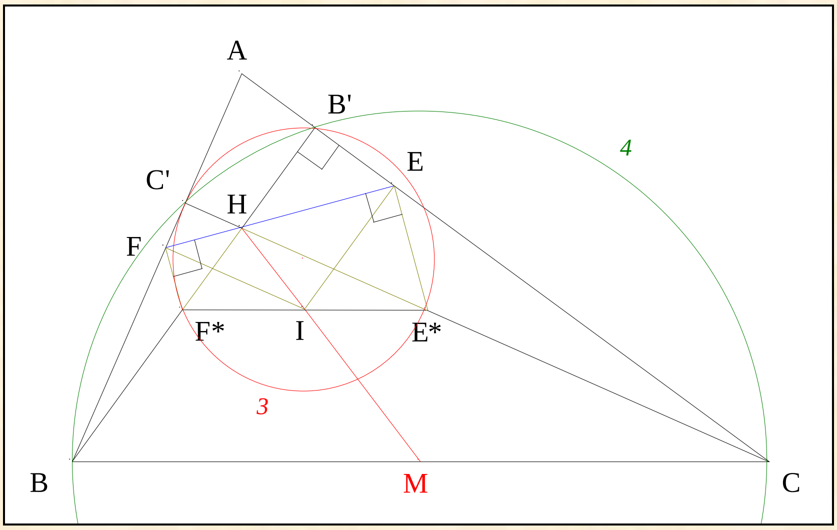
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", E*, E, C', F sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle de diamètre [E*F].



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [29], F*, C', B', E* sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", B, C', B', C sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle de diamètre [BC].

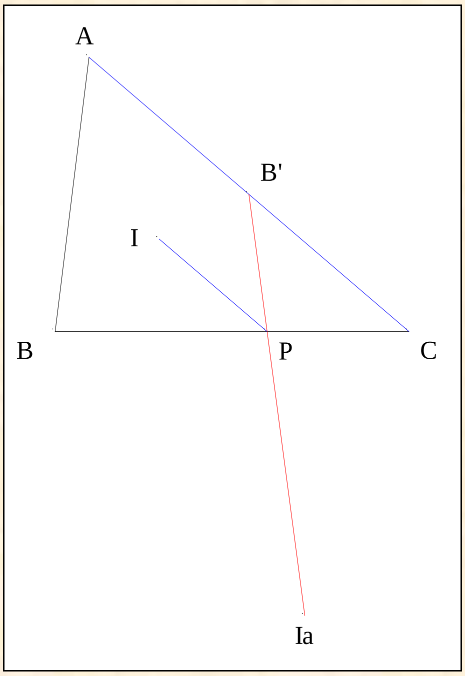
- **Conclusion :** les cercles *3* et *4*, les points de base B' et C', les moniennes (F*B'B) et (E*C'C), conduisent au théorème **0** de Reim ;
  il s'en suit que (E*F*) est parallèle à (BC).

2. Trois points alignés

VISION

Figure :

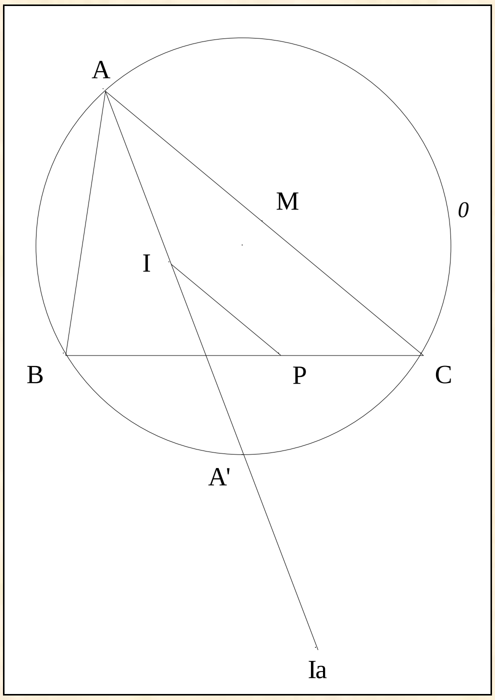
[29] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. , p. ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
P le point d'intersection de la parallèle à (CA) passant par I avec (BC),
Ia le A-excentre de ABC
et M le milieu de [CA].

Donné : (IP) est parallèle à (AC) *si, et seulement si,* M, Ia et P sont alignés.[30]

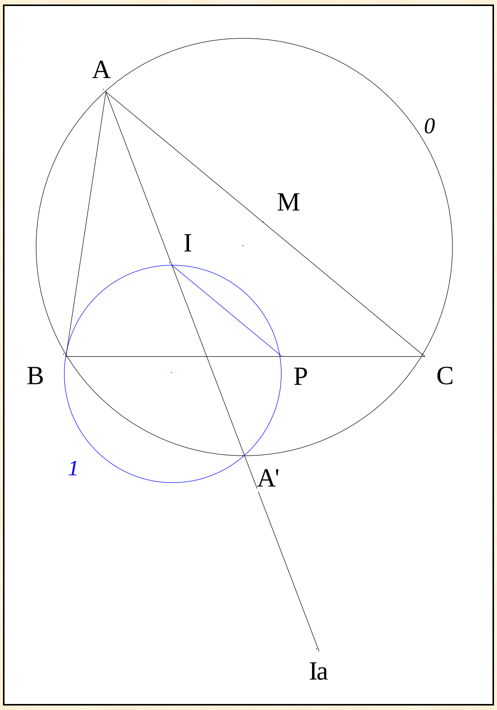
VISUALISATION NÉCESSAIRE



- **Scolie :** A, I et Ia sont alignés.

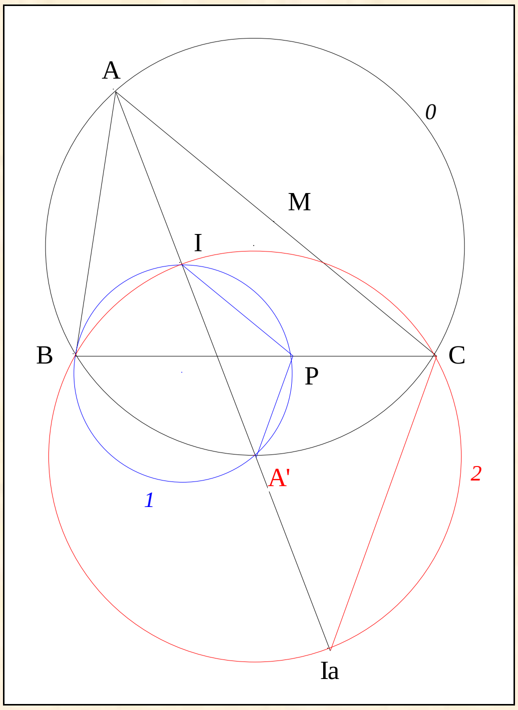
[30] O.M. Taiwan (2001) problème 1.

- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC
  et A' le second point d'intersection de (AI) avec *1*.



- Le cercle *1*, les points de base B et A', les moniennes naissantes (CBP) et (AA'I), les parallèles (CA) et (PI), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, B, A', P et I sont cocycliques.

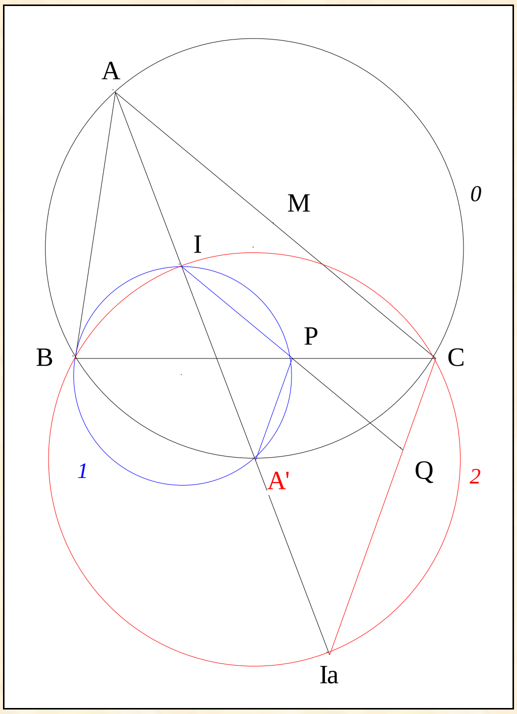
- Notons *1* ce cercle.



- D'après Mention "Theorem of schamrock", **(1)** I, B, Ia et C sont cocycliques
  (2) A' est le centre de ce cercle.

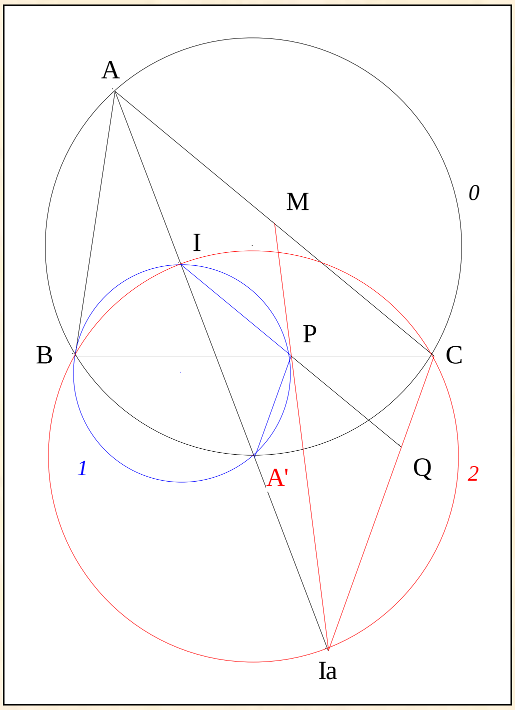
- Notons 2 le A-cercle de Mention.

- Les cercles *2* et *1*, les points de base B et I, les moniennes (CBP) et (IaIA'), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (CIa) // (PA').



- Notons Q le point d'intersection de (IP) et (CIa).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle IIaQ, P est le milieu de [IQ].



- **Conclusion :** d'après Thalès "Le trapèze complet" appliqué au trapèze AIQC, M, Ia et P sont alignés.

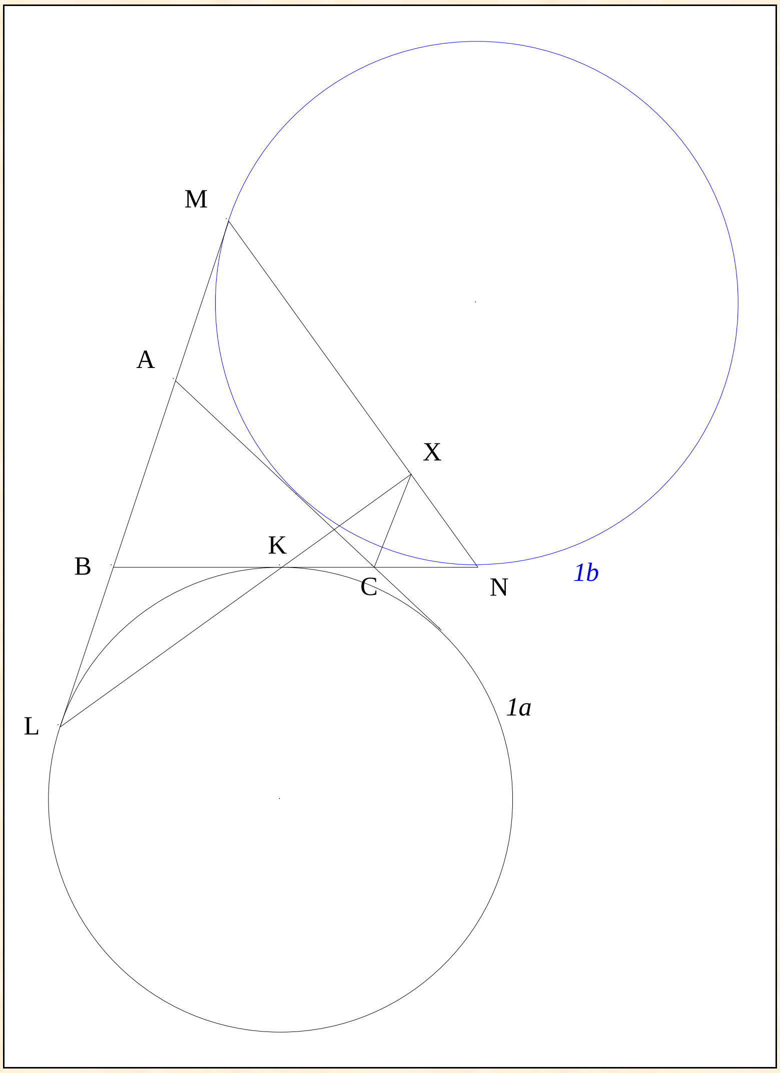
VISUALISATION SUFFISANTE

- **Commentaire :** le lecteur pourra mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde

3. "Concourance" sur un côté d'un triangle excontact

VISION

Figure :

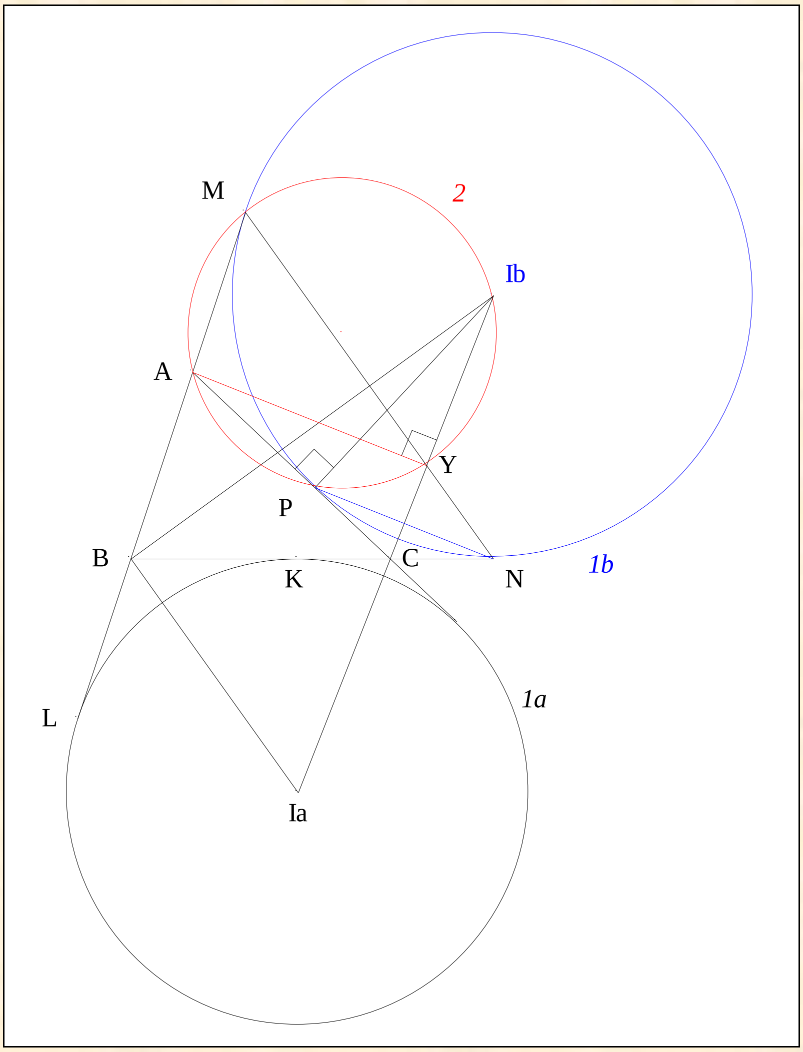


Traits : ABC un triangle,
1a le A-excercle de ABC,
L, K les points de contact de *1a* resp. avec (AB), (BC),
1b le B-excercle de ABC,
M, N les points de contact de *1b* resp. avec (AB), (BC),
et X le point d'intersection de (MN) et (LK).

Donné : (CX) est la bissectrice extérieure de <ACB. [31]

[31] German TST, Exam V, problem 1 (2004).

VISUALISATION



- Notons Ia, Ib les centres resp. de *1a*, *1b*,
  P le point de contact de *1b* avec (AC)
  et Y le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (IaCIb).

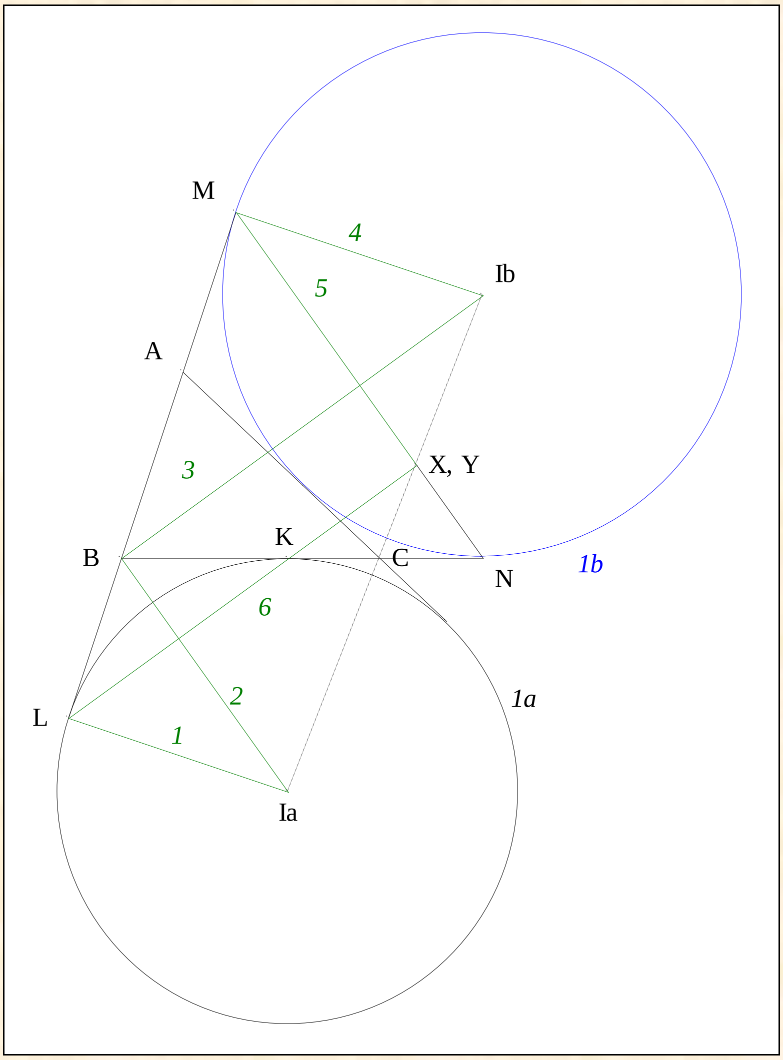
- **Scolie :** (IaCYIb) est la C-bissectrice extérieure de <ACB.

- Nous savons que (PN) ⊥ (IaCIb) ;
  par hypothèse, (IaCIb) ⊥ (AY) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PN) // (AY).

- D'après Thalès "Triangle rectangle inscriptible dans un demi cercle", A, P, Y, Ib et M sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

- **Conclusion partielle :** les cercles *1b* et *2*, les points de base P et M, la monienne (PPA), les parallèles (PN) et (AY), conduisent au théorème **3'** de Reim ;
  en conséquence, N, M et Y sont alignés.



- Nous savons que (LKX) ⊥ (BIa) et (BIb) ⊥ (MXN) ;
  (BIa) ⊥ (BIb) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (LKX) // (BIb) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (BIa) // (MXN).

- Par hypothèse, (IaL) ⊥ (AB) et (AB) ⊥ (IbM) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IaL) // (IbM).

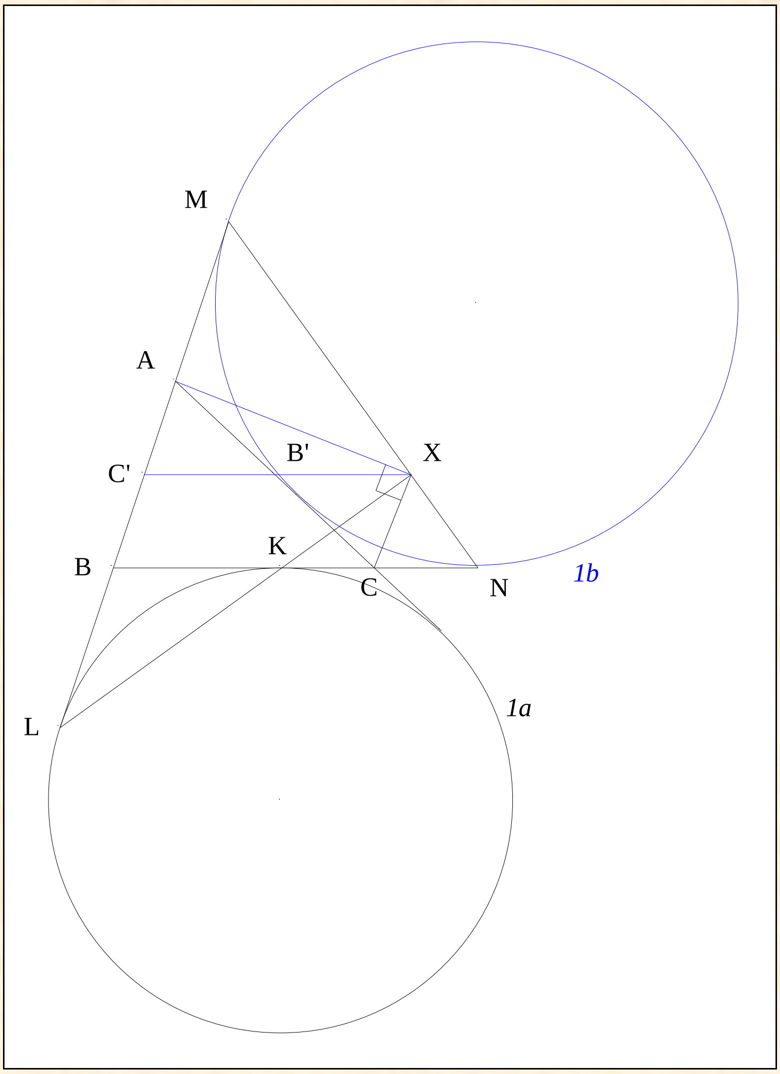
- D'après Pappus "Le petit théorème"[32] appliqué à l'hexagone LIaBIbMXL, Ia, X et Ib sont alignés.

- Y étant à la fois sur (MN) et (IaIb),
  X étant à la fois sur (MN), (LK) et (IaIb), X et Y sont confondus.

- **Conclusion :** (CX) est la C-bissectrice extérieure de <ACB.

Scolies : **(1)** une autre droite passant par X

[32] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol.6 , p.2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

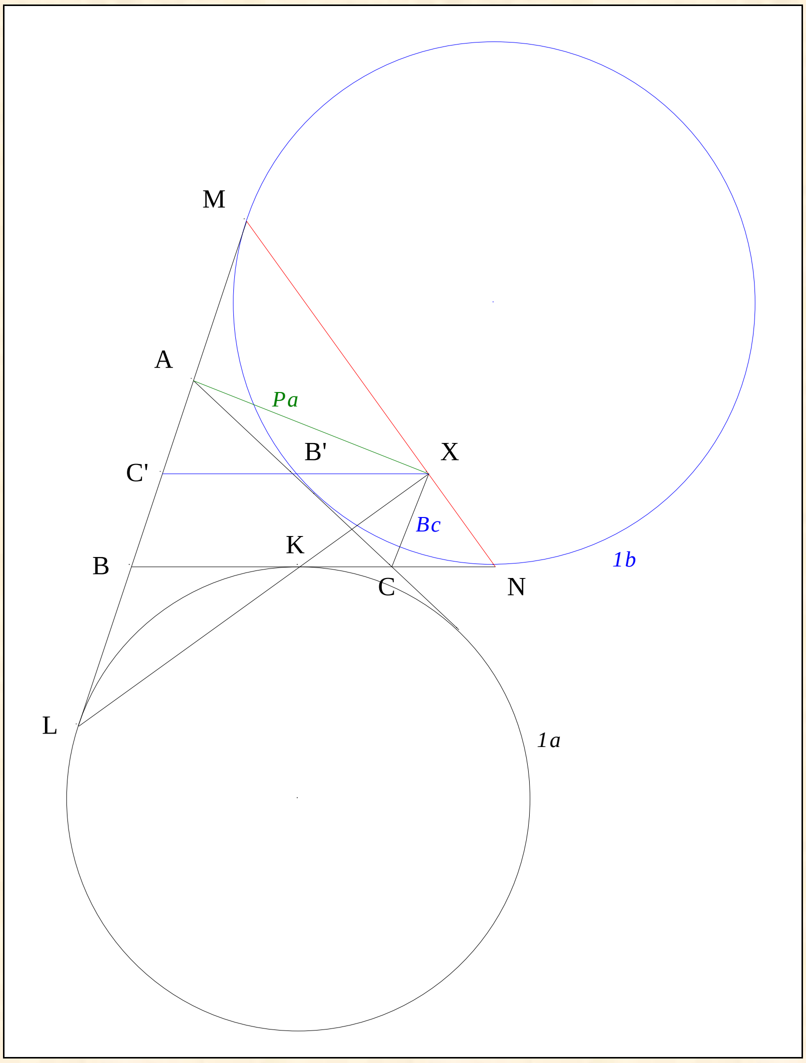


- Notons B', C' les milieux resp. de [CA], [AB].

- D'après Lascases "Six points alignés"[33], (B'C') passe par X.

(2) Une autre formulation du résultat

[33] Ayme J.-L., An unlikely concurrence revisited and generalized, G.G.G. vol.4 , p.1-3 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Traits : ABC un triangle,
1b le B-excercle de ABC,
N, M les points de contact de *1b* resp. avec [BC], [AB],
*B*c la C-bissectrice extérieure de ABC,
*P*a la perpendiculaire à *B*c, passant par A
et B', C' les milieux resp. de [CA], [AB].

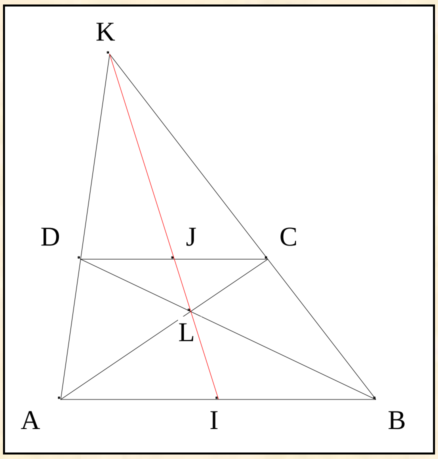
Donné : *P*a , *B*b, (MN) et (B'C') sont concourantes.

Commentaire : la solution de Grinberg est angulaire.
Ce résultat est une généralisation aux excercles de celui de Lascases "An unlikely concurrence". Cette généralisation s'enrichit d'une droite supplémentaire passant par le point de concours, la droite (LK) dans ce cas de figure.

Note historique : ce problème a été posé lors de l'entraînement de l'équipe allemande pour les OIM. Cette équipe initialement formée de 16 élèves, se réduira à 6 à l'issue des tests de sélection dénommé TST i.e. "team selection tests". Les problèmes proposés sont en général tirés d'une liste de problèmes proposés aux dernières olympiades, mais non retenus.

G. ANNEXE

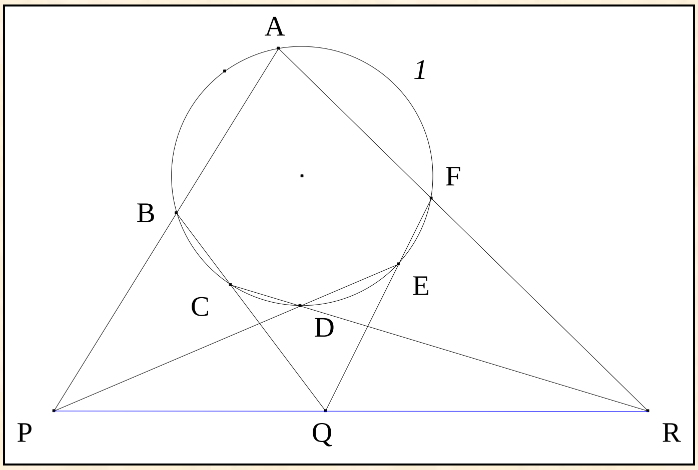
1. Le trapèze complet



Traits : ABCD un quadrilatère,
I le milieu de [AB],
J le milieu de [CD],
K le point d'intersection des droites latérales (AD) et (BC)
et L le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD)
si, et seulement si,
les points I, J, K et L sont alignés.

2. Hexagramma mysticum[34]



Traits : *1* un cercle,
ABCDEF un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

[34] Pascal B. (1640)