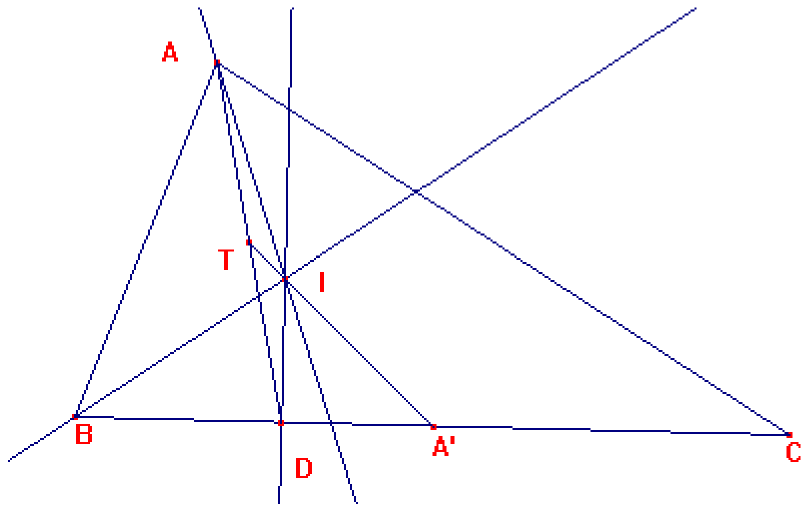
Problema 820
Sea un triángulo ABC. Sea A' el punto medio de BC. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Sea T el punto medio del segmento AD. Demostrar que el segmento A'T pasa por I, centro de la circunferencia inscrita.

Solución del director



.

Las coordenadas baricéntricas de un punto P cualquiera del plano respecto a un triángulo ABC son (S(PBC): S(PCA) : S(PAB)), es decir las áreas de los tres triángulos que forma el punto con los lados del triángulo.
Sea S el área de ABC y sea s el semiperímetro de ABC.

Las coordenadas baricéntricas del punto A son:
(S(ABC): S(ACA) : S(AAB)) = (S, 0, 0)

Las del punto A' son:
(S(A' BC): S(A' CA) : S(A'AB)) = (0, 1/2S , 1/2S)

Las coordenadas baricéntricas del punto D son:
(S(DBC): S(DCA) : S(DAB)) =(0: ((s-c)/a)S: ((s-b)/a)S)

Las coordenadas baricéntricas de I son:
(S(IBC): S(ICA) : S(IAB))= (1/2 r a: 1/2 rb : 1/ 2 rc).

Las coordenadas baricénticas de T (punto medio de AD) son:

(1/ 2 S : 1/ 2 ((s-c)/a)S: 1/ 2 ((s-b)/a)S)

La recta que pasa por A' y T tiene de ecuación :

Las del punto A’ son:
(S(A’ BC): S(A’ CA) : S(A’AB)) = (0, 1/2S , 1/2S)
Las coordenadas baricénticas de T (punto medio de AD) son:

(1/ 2 S : 1/ 2 ((s-c)/a)S: 1/ 2 ((s-b)/a)S)

Debido a que vamos a igualar a cero un determinante, podemos homogeneizar las coordenadas simplificando los factores que estén en los tres términos:

(0 : 1 : 1) para A’ simplificando 1/ 2 S,
(a: s-c: s-b) para T simplificando (1/2) S y multiplicando por a
(a: b:c) en I simplificando por 1 / 2 r

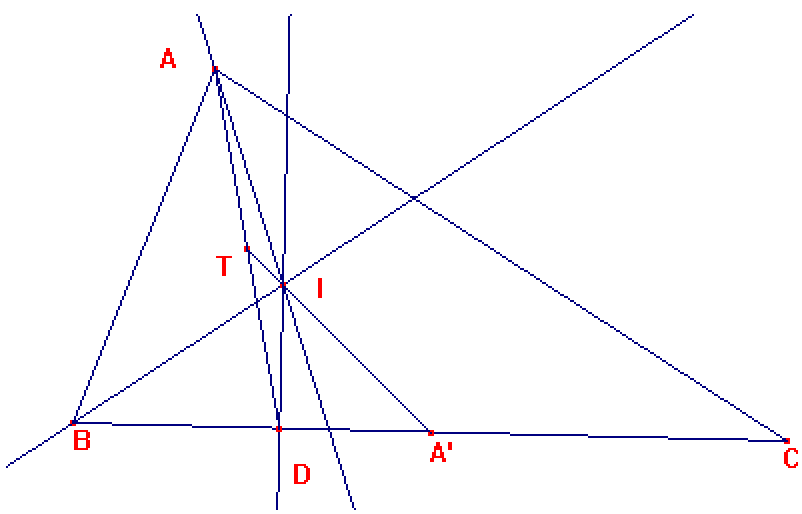
Así la recta que pasa por A’ T es:

0	1	1		
a	s-c	s-b	=	0
x	y	z		

¿Es (a:b:c) de la recta?

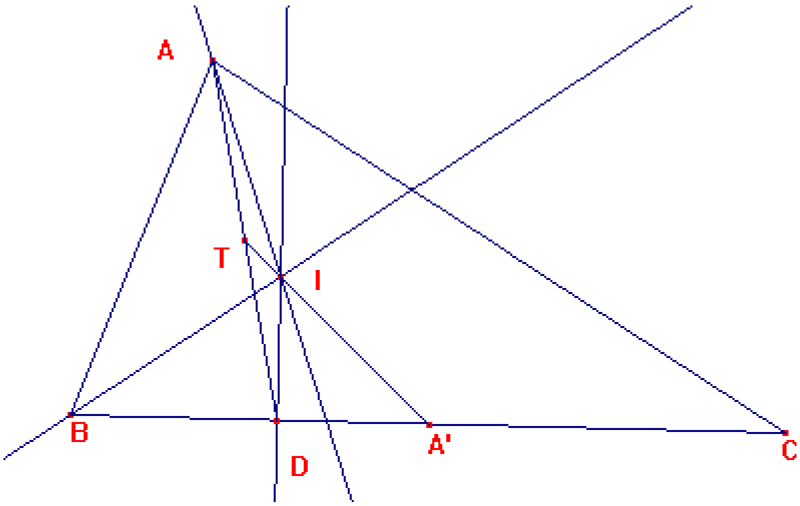
0	1	1		
a	s-c	s-b	=	0
a	b	c		

Desarrollando queda: a(s-b) + ab – a(s-c) – ac= as-ab+ab-as+ac -ac=0, cqd.



Solución por Menelao

Supongamos sin pérdida de generalidad que b>c.
Sea W_a el pie de la bisectriz del ángulo A.
Consideremos el triángulo ADW_a que tiene la transversal A' T



Será por Menelao,
AT DA' W_a X= TD A'W_a AX

AT=TD =AD/2 por ser T el punto medio
A'D= A'B – DB= (a/2) –((a+c-b)/2)=(b-c)/2
A'W_a =A'B- BW_a =a/2 – ((ac)/(b+c))=a ((b-c)/2(b+c))
Así es:

(AD/2) ((b-c)/2) W_aX= ((AD)/2) (a ((b-c)/2(b+c))) AX
Por lo que
W_aX= (a/(b+c)) AX
Así pues X es el incentro , cqd.
Ricardo Barroso Campos.
Jubilado.
Sevilla. España