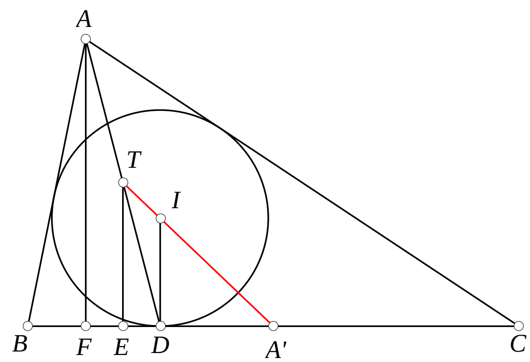
Problema 820. Sea un triángulo $\triangle ABC$. Sea A' el punto medio de BC. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Sea T el punto medio del segmento AD. Demostrar que el segmento $A'T$ pasa por I, centro de la circunferencia inscrita.

Referencia desconocida

Solución de Ercole Suppa. Denotamos con E y F las proyecciones de T y A en la recta BC, respectivamente.

Está claro que si $AB = AC$ entonces $D = A'$ y los puntos T, I, A' pertenecen a la recta AD. Supongamos, por lo tanto, sin pérdida de generalidad, que $AB < AC$ como se muestra en la figura.



Utilizando las notaciones habituales de la geometría del triángulo tenemos

$$TE = \frac{1}{2} \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{S}{a} = \frac{pr}{a}$$
$$ID = r$$
$$BD = p - b = \frac{a+c-b}{2}$$
$$DA' = BA' - BD = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2}$$
$$FD = BD - BF = p - b - c\cos B = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}$$
$$ED = \frac{1}{2} \cdot FD = \frac{(b-c)(b+c-a)}{4a}$$
$$EA' = ED + DA' = \frac{(b-c)(b+c-a)}{4a} + \frac{b-c}{2} = \frac{(b-c)(a+b+c)}{4a}$$

de la que se deduce que

$$\frac{TE}{ID} = \frac{p}{a} = \frac{a+b+c}{2a} = \frac{EA'}{DA'}$$

Esto, teniendo en cuenta que $\angle TEA' = \angle IDA' = 90°$, implica que $\triangle TEA'$ y $\triangle IDA'$ son triángulos semejantes y entonces

$$\angle TA'E = \angle IA'D = \angle IA'E \qquad \Leftrightarrow \qquad T, I, A' \text{ están alineados}$$

$\square$