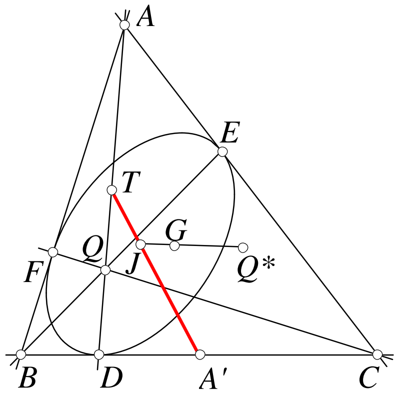
Problema 820 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo ABC. Sea A' el punto medio de BC. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Sea T el punto medio del segmento AD. Demostrar que el segmento $A'T$ pasa por I, centro de la circunferencia inscrita.*

Referencia desconocida.

Solución de Francisco Javier García Capitán. El enunciado es cierto para una cónica inscrita al triángulo:



Sea $Q = (u : v : w)$ cualquier punto. La cónica inscrita con perspector Q, es decir que es tangente a los lados del triángulo en los vértices D, E, F del triángulo ceviano de Q, tiene ecuación

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} - \frac{2yz}{vw} - \frac{2zx}{wu} - \frac{2xy}{uv} = 0.$$

En efecto, al hacer $x = 0$ resulta la ecuación

$$\frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} - \frac{2yz}{vw} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{v} - \frac{z}{w}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (0 : y : z) = (0 : v : w) = D,$$

y lo mismo para los otros vértices.

La matriz de la cónica es

$$M = \begin{pmatrix} -v^2w^2 & uvw^2 & uv^2w \\ uvw^2 & -u^2w^2 & u^2vw \\ uv^2w & u^2vw & -u^2v^2 \end{pmatrix},$$

y su adjunta la matriz

$$M^\# = \begin{pmatrix} 0 & 2u^3v^3w^2 & 2u^3v^2w^3 \\ 2u^3v^3w^2 & 0 & 2u^2v^3w^3 \\ 2u^3v^2w^3 & 2u^2v^3w^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El centro de la cónica, polo de la recta del infinito, se obtiene al hacer el producto $M^\# \cdot G$, siendo $G = (1 : 1 : 1)$ el baricentro, y así obtenemos el punto $J = (u(v + w) : v(w + u) : w(u + v))$.

El punto J puede obtenerse como el complemento del conjugado isotómico Q^* de Q.

Por otro lado, el punto medio de $A = (1 : 0 : 0) = (v + w : 0 : 0)$ y $D = (0 : v : w)$ es $T = (v + w : v : w)$, y el punto medio BC es $A' = (0 : 1 : 1)$.

La identidad

$$\begin{aligned}
&(u(v+w), v(w+u), w(u+v)) \\
=&vw\,(0,1,1) + u\,(v+w, v, w) \\
=&2vw\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + 2u(v+w)\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2(v+w)}, \frac{w}{2(v+w)}\right)
\end{aligned}$$

nos dice que Q está sobre la recta $A'T$ y además que Q divide el segmento AT en la razón

$$\frac{A'J}{JT} = \frac{u\,(v+w)}{vw}.$$

Teniendo en cuenta que $y + z = 0$ es la ecuación de la paralela a BC por A, el punto J será interior al segmento $A'T$ cuando Q esté en alguna de las regiones coloreadas en la figura, en particular cuando Q sea interior a triángulo ABC: