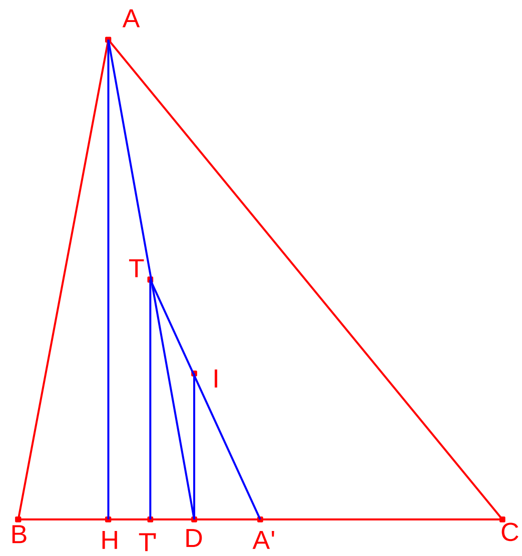
Problema 820

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga A’ el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga D el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$. Siga T el punt mig del segment $\overline{AD}$. Demostreu que $\overline{A'T}$ passa pel centre de la circumferència inscrita I.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:



Sense restar generalització, suposem que $b \geq c$.

$\overline{BD} = \frac{a+c-b}{2}$.

Siga $\overline{AH} = h_a$ l’altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga T’ la projecció de T sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{DI} = r$ radi de la circumferència inscrita.

$\overline{DA'} = \frac{a}{2} - \overline{BD} = \frac{b-c}{2}$.

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{DA'}} = \frac{2r}{b-c} \qquad (1)$$

$\overline{BH} = c \cdot \cos B$. Aplicant el teorema del cosinus:

$\overline{BH} = c \cdot \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{2a}$.

T és el punt mig del segment $\overline{AD}$ aleshores, $\overline{HT'} = \overline{DT'}$, $\overline{TT'} = \frac{1}{2}\overline{AH}$

$\overline{HT'} = \overline{DT'} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{4a}$.

$\overline{T'A'} = \overline{DT'} + \overline{DA'} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{4a} + \frac{b-c}{2} = \frac{(b-c)(a+b+c)}{4a}$.

$$\frac{\overline{TT'}}{\overline{T'A'}} = \frac{\frac{1}{2}h_a}{\frac{(b-c)(a+b+c)}{4a}} = \frac{\frac{1}{2}ah_a}{\frac{a+b+c}{4}(b-c)}.$$

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = r\frac{a+b+c}{2}$. Aleshores:

$$\frac{\overline{TT'}}{\overline{T'A'}} = \frac{\frac{1}{2}ah_a}{\frac{a+b+c}{4}(b-c)} = \frac{r\frac{a+b+c}{2}}{\frac{b-c}{2}\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2r}{b-c} \qquad (2)$$

De les expressions (1) i (2) deduïm que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{TT'A'}$, $\overset{\Delta}{IDA'}$ són semblants, aleshores els punts T, I, A’ estan alineats.