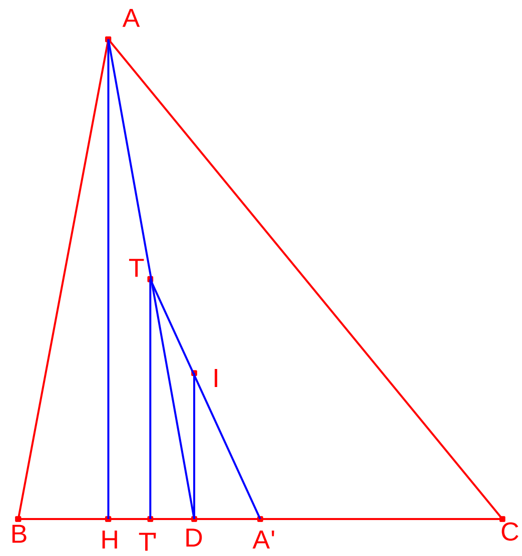
Problema 820

Sea un triángulo ABC. Sea A' el punto medio de BC. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Sea T el punto medio del segmento AD. Demostrar que el segmento A'T pasa por I, centro de la circunferencia inscrita.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:



Sin quitar generalización, supongamos que $b \geq c$.

$\overline{BD} = \frac{a+c-b}{2}$.

Sea $\overline{AH} = h_a$ la altura del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea T' la proyección de T sobre el lado $\overline{BC}$.

$\overline{DI} = r$ radio de la circunferencia inscrita.

$\overline{DA'} = \frac{a}{2} - \overline{BD} = \frac{b-c}{2}$.

$$\frac{\overline{DI}}{\overline{DA'}} = \frac{2r}{b-c} \qquad (1)$$

$\overline{BH} = c \cdot \cos B$. Aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{BH} = c \cdot \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{2a}.$$

T es el punto medio del segmento $\overline{AD}$ entonces, $\overline{HT'} = \overline{DT'}$, $\overline{TT'} = \frac{1}{2}\overline{AH}$

$$\overline{HT'} = \overline{DT'} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{4a}.$$

$$\overline{T'A'} = \overline{DT'} + \overline{DA'} = \frac{ac-ab-c^2+b^2}{4a} + \frac{b-c}{2} = \frac{(b-c)(a+b+c)}{4a}.$$

$$\frac{\overline{TT'}}{\overline{T'A'}} = \frac{\frac{1}{2}h_a}{\frac{(b-c)(a+b+c)}{4a}} = \frac{\frac{1}{2}ah_a}{\frac{a+b+c}{4}(b-c)}.$$

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = r\frac{a+b+c}{2}$. Entonces:

$$\frac{\overline{TT'}}{\overline{T'A'}} = \frac{\frac{1}{2}ah_a}{\frac{a+b+c}{4}(b-c)} = \frac{r\frac{a+b+c}{2}}{\frac{b-c}{2}\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2r}{b-c} \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce que los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{TT'A'}$, $\overset{\Delta}{IDA'}$ son semejantes, entonces los puntos T, I, A' están alineados.