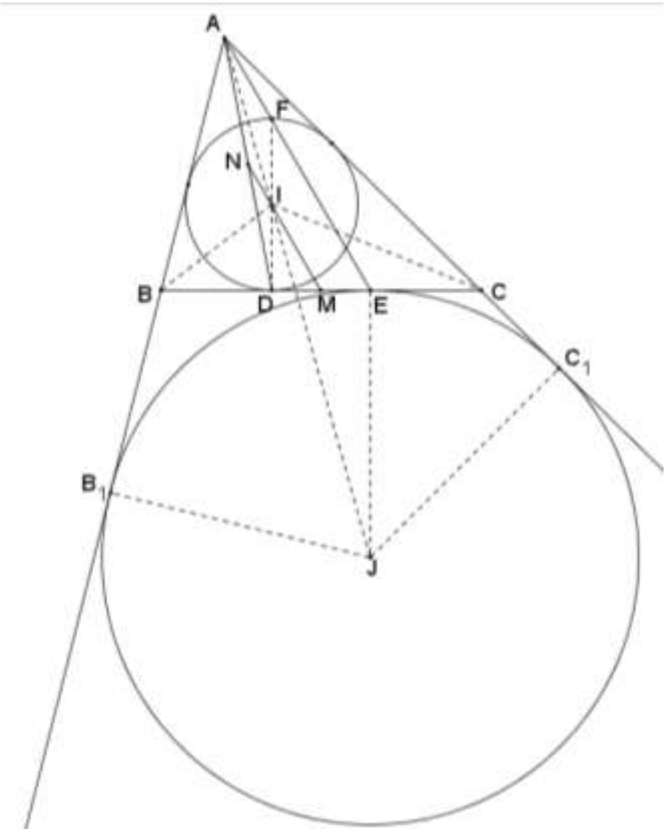
Problema n° 820
Sea un triángulo ABC. Sea A' el punto medio de BC. Sea D el punto de contacto de la circunferencia inscrita con BC. Sea T el punto medio del segmento AD.
Demostrar que el segmento A'T pasa por I, centro de la circunferencia inscrita.
Referencia desconocida.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soient:
- E,B_1 et C_1 les points de contact du cercle exinscrit de centre J dans le secteur de l'angle en A avec le côté BC et les droites AB et AC.
- F le point diamétralement opposé à D sur le cercle inscrit du triangle ABC.
- M le milieu du côté BC et N le milieu du segment AD.

Soient a,b et c les côtés du triangle BC = a, CA = b et AB = c et s = demi-périmètre = (a + b + c)/2.

Lemme n°1: la droite AE passe par le point F
Démonstration: on considère l'homothétie de centre A et de rapport AJ/AI qui transforme le cercle inscrit de centre I en le cercle exinscrit de centre J.Le diamètre DF du cercle inscrit devient alors le diamètre du cercle exinscrit perpendiculaire à BC.Le point F devient alors le point E.

Lemme n°2: M est le milieu de DE.
On a $AB_1 = AC_1$ = AB + BE = AC + CE. D'où CE = AB + BE –AC ou 2CE = AB + BC – AC = a – b + c.
Or on sait que BD = s – b = (a – b + c.)/2. D'où BD = CE. Cqfd.

Dans le triangle rectangle DEF, la droite MI qui joint les milieux des côtés DE et DF est parallèle à FE donc à AE. Dans le triangle DAE, cette même droite coupe le côté AD en son milieu N. Cqfd.