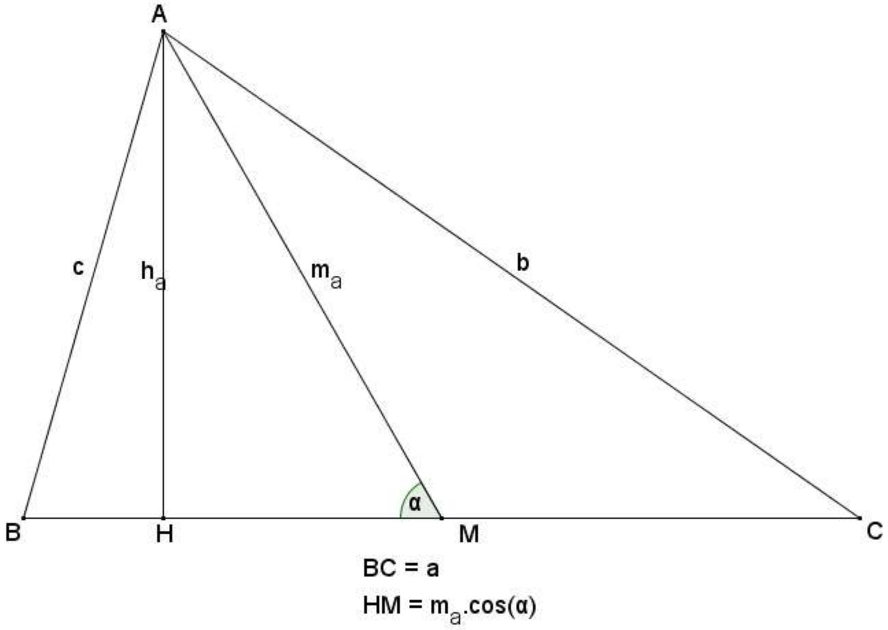
Problema n° 821
Construir el triángulo cuyos datos son h_a, m_a, b + c.
Santamaría, J. (2017):Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



La hauteur AH = h_a et la médiane AM = m_a issues de A étant connues, on en déduit le côté HM du triangle rectangle HAM ainsi que l'angle α de la médiane AM avec le côté BC. HM = $\sqrt{m_a^2 - h_a^2}$ et sin(α) = h_a/m_a.

On connaît par ailleurs la grandeur d = b + c et on suppose sans perte de généralité b > c.

On a les deux égalités: $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a.m_a.\cos(\alpha)$ et $c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a.m_a.\cos(\alpha)$.

On en déduit:

$$\sqrt{m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a.m_a.\cos(\alpha)} = d - \sqrt{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a.m_a.\cos(\alpha)}$$

Par éliminations successives des deux radicaux, on obtient la relation:

$$a = d\sqrt{\frac{d^2 - 4m_a^2}{d^2 - 4m_a^2\cos^2(\alpha)}} = d\sqrt{\frac{d^2 - 4m_a^2}{d^2 - 4HM^2}}$$

qui permet d'exprimer le côté BC = a en fonction des trois grandeurs h_a , m_a et d = b + c.
a est toujours défini quand d > 2 m_a.
Comme l'expression donnant a contient une racine carrée et des formes quadratiques, a est constructible à la règle et au compas.