GÉOMÉTRIE

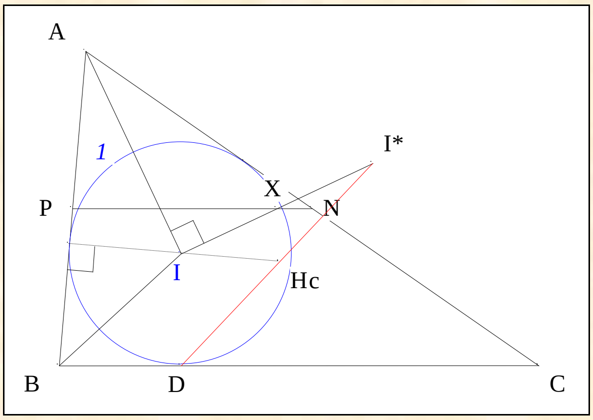
LA BELLE HISTOIRE

UN SUJET DE L'AUTEUR

[2]

L'histoire factuelle et concomitante
n'est autre que le reflet
d'histoires [1] *intérieures et non concomitantes.*

Jean-Louis AYME [3]



Résumé. L'auteur présente *La belle histoire* où chaque Sujet, pris dans le noeud coulant d'un lasso, livre, escale après escale, des résultats qui permettent d'élaborer une solution fructueuse par la suite...
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

---

[1] Vient du latin "historia" qui signifie "histoire vraie", vécue.
[2] Sankt Wolfgang im Salzkammergut (Austria). Il est internationalement célèbre grâce à l'opérette *L'Auberge du Cheval-Blanc*
[3] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 28/04/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract.

The author presents *The beautiful story* where each subject, taken in the flowing node of a lasso, leads, step after step, to results which will might allow us to reach out eventually for a fruitful solution...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Resumen.

El autor presenta *La hermosa historia* donde cada Sujeto, atrapado en el nodo fluido de un lasso, trae, paso a paso, resultados que permiten desarrollar posiblemente una solución fructífera...
Las figuras están en posición general y todos los teoremas mencionados pueden todos ser demostrados sintéticamente.

Zusammenfassung.

Der Autor präsentiert *Die schöne Geschichte* in welcher jeder Leitgedanke zuerst durch den lockeren Knoten eines Lasso's fließen muss, um nach und nach, Ergebnisse zu zeigen, die uns im Endeffekt eine fruchtbare Lösung ermöglichen...
Die Figuren sind alle in einer allgemeinen Position und alle aufgeführten Lehrsätze können synthetisch nachgewiesen werden.

J'ai croisé…

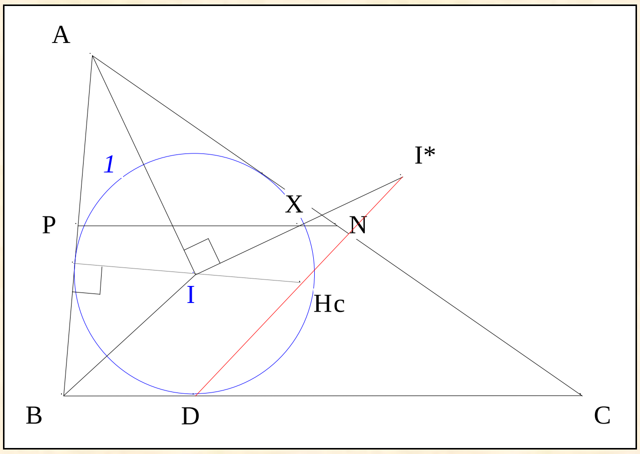
J'ai rencontré…

Je me suis déplacé…

LE SUJET DE L'AUTEUR [4]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle tel que AB < AC,
	N, P	les milieux resp. de [AC], [AB],
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	D	le point de contact de *1* avec (BC),
	X	le point d'intersection de (NP) et de la perpendiculaire à (AI) en I,
	I*	le symétrique de I par rapport à X
et	Hc	l'orthocentre du triangle IAB.

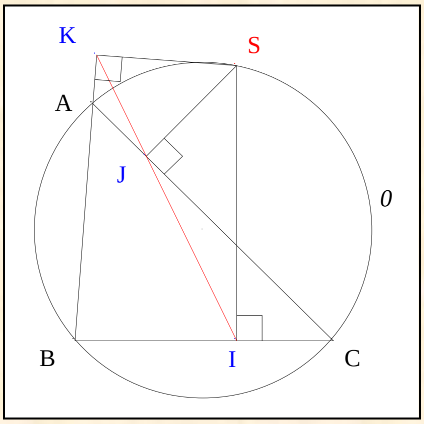
Donné : I* est sur (DHc).

[4] Ayme J.-L., Hard or simple, AoPS du 18/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h1433720_hard_or_simple
Problema **825** ; http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

ESCALE 1

La S-droite de Simson-Wallace [5]

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
S un point
et I,J,K les pieds des perpendiculaires abaissées de S resp. sur (BC), (CA), (AB).

Donné : S est sur *0* *si, et seulement si,* (IJK) est une ménélienne de ABC.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [6]

Scolie : (IJK) est la S-droite de Simson-Wallace ou pédale de pôle S de *0* relativement à ABC.

Note historique : bien que l'historien d'Edimburgh, John Sturgen Mackay [7] n'a trouvé aucune trace de la droite dite de Simson dans ses oeuvres, il montra que cette erreur en paternité provenait du géomètre français François Joseph Servois qui écrivait en 1814 :

le théorème suivant, qui est, je crois, de Simson...[8]

Cette erreur allait être reprise par Jean Victor Poncelet[9] qui, en omettant la remarque de Servois, allait perpétuer définitivement ce fait. C'est en 1799 que William Wallace [10] découvrait "cette droite", bien après la mort de Simson en 1768.

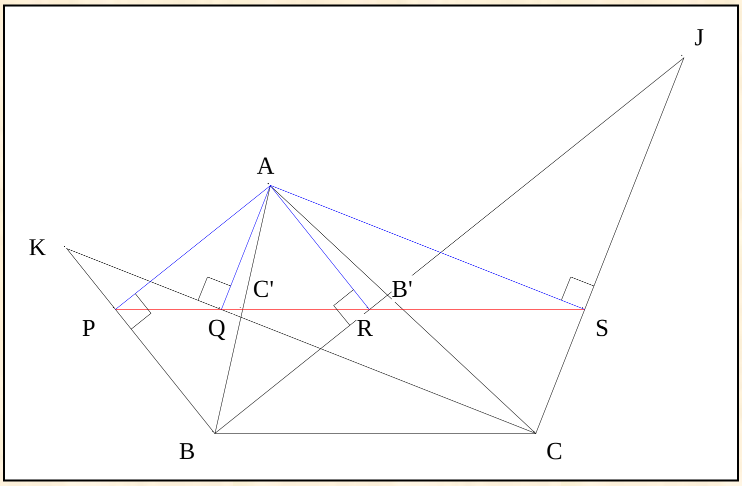
---

[5] Wallace, *Leybourne's* mathem. repository (old series) **2** (1798) 111
[6] Ayme J.L., Droite de Simson…, G.G.G., vol. **7**, p. 2-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[7] MacKay J. S., *Proceedings Edinburgh Math Soc.*, (1890-1891) 83
[8] Servois F. J., *Annales de Gergonne* **4** (1813-14) 250-251
[9] Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)
[10] Wallace W. (1768-1843), *Leybourne's* mathem. repository (old series) **2** (1798) 111

ESCALE 2

La A-droite d'Arthur Lascases [11]

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	B', C'	les milieux resp. de [CA], [AB],
	J, K	les points B, C-excentraux de ABC
et	P, Q, R, S	les pieds des perpendiculaires abaissées de A resp. sur (BK), (CK), (BK), (CK).

Donné : P, Q, R, S, B' et C' sont alignés.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat basée sur la droite de Simson-Wallace peut être vue sur le site de l'auteur. [12]

Note historique : les premières solutions ont été données par Joseph Vigne de Toulon, Léon Vidal, élève du même lycée (classe de Monsieur Huet) et l'abbé Poitrasson.
Le recours à la droite de Simson-Wallace a été utilisé par Wilkinson en 1862 et aussi par l'élève Léon Vidal [13] en 1872.

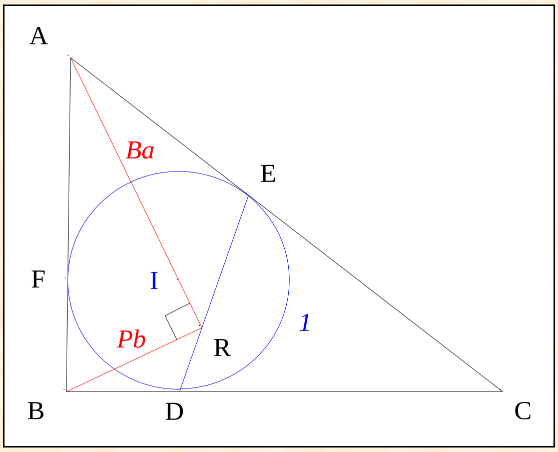
[11] Lascases Arth., Question **477**, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171
[12] Ayme J.L., Un unlikely concurrence, G.G.G., vol. **4**, p. 1-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[13] Vidal L., *Nouvelles Annales* **2** 11, (1872) 265

ESCALE 3

La A-ligne brisée de Nathan Altshiller-Court [14]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	Ba	la A-bissectrice de ABC,
	Pb	la perpendiculaire à *B*a issue B
et	R	le point d'intersection de *Pb* et *Ba*.

Donné : R est sur (DE).

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat basée sur le théorème de Reim peut être vue sur le site de l'auteur. [15]

Note historique : ce résultat qui a été qualifié de *an unlikely concurrence* par Ross Honsberger [16] en 1995, a été proposé comme exercice par Nathan Altshiller-Court en 1952 et avait été étudié dans le cas particulier du triangle rectangle par Georges Papelier [17] en 1927.

[14] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc., (1952) exercise **43**, p. 118
Lines from vertices to some point are perpendicular, 2012 Indonesia Round 2.5 TST **1** Problem **3**, *Mathlinks* du 10/05/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=479013
Nice, AoPS du 22/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=572362

[15] Ayme J.-L., An unlikely concurrence, revisited and generalized, vol. **4**, p. 5-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[16] Honsberger R., *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31

[17] Papelier G., *Exercices de géométrie Modernes*, Pôles et polaires (1927) 19

ESCALE 4

Indian TST Day **2** Problem **1**

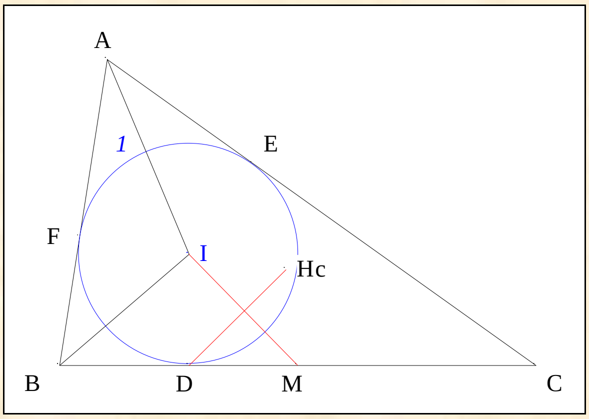
Une perpendiculaire

à

la A-*droite* (MI) *de Jean-Baptiste Durrande* [18]

VISION

Figure :

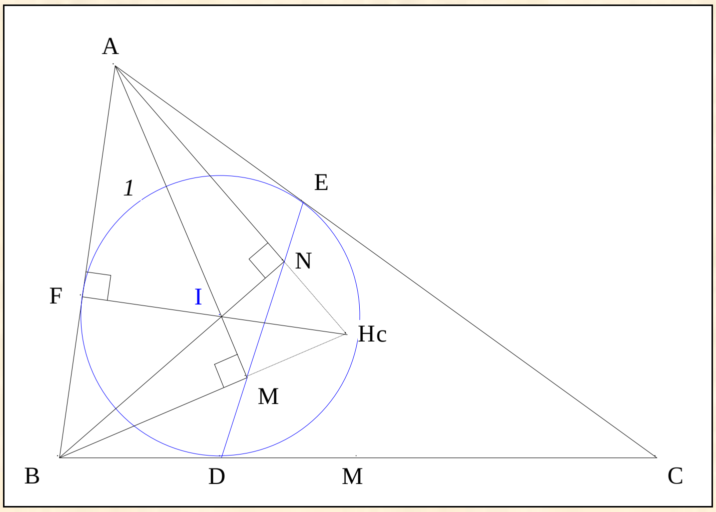


Traits :	ABC	un triangle,
	M	le milieu de [BC],
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC
et	Hc	l'orthocentre du triangle IAB.

Donné : (DHc) est perpendiculaire à (MI).

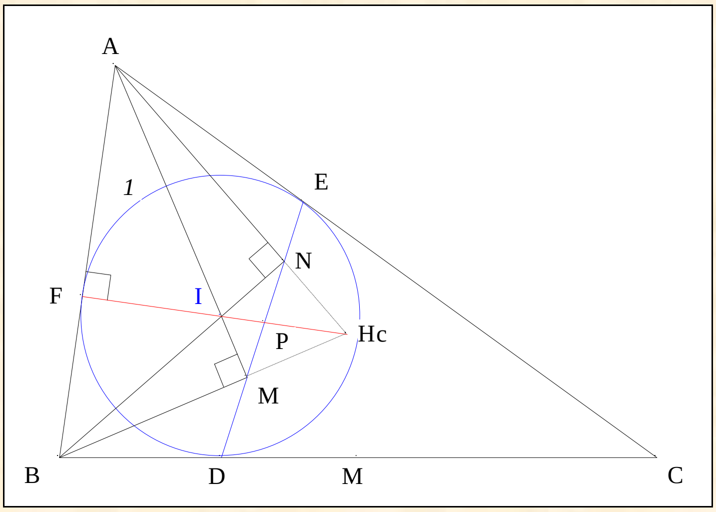
VISUALISATION

18 Line joining incentre and midpoint perpendicular to a line, AoPS du 11/07/2014 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=597376
beautiful geometry, AoPS du 20/06/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1104088_beautiful_geometry
Geometry, AoPS du 18/11/2016
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1301875_incircle_and_circumcircle



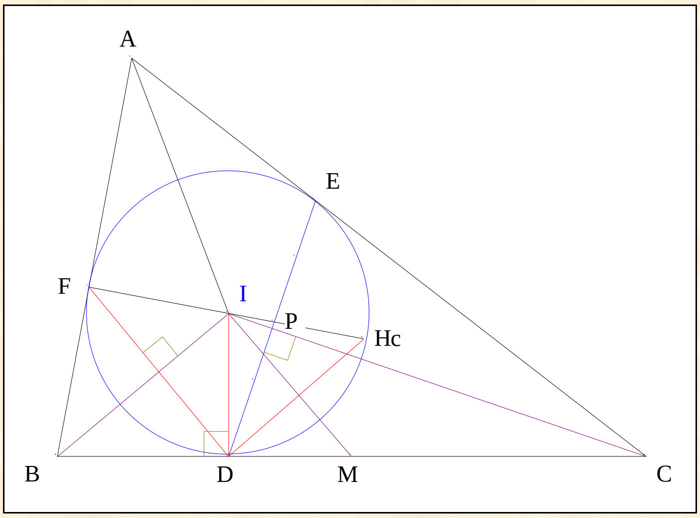
- Notons M, N les points d'intersection de (DE) resp. avec (AI), (BI).

- D'après Etape **3**, (AN), (BM) sont resp. les A, B-hauteurs de IAB ;
  en conséquence, Hc est le point d'intersection de (AN) et (BN).



- Notons P le point d'intersection de (DE) et (FIHc).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet"
  appliqué au quadrilatère IMHcN, le quaterne (I, Hc, P, F) est harmonique ;
  par permutation, le quaterne (P, F, I, Hc) est harmonique.



- **Conclusion partielle :** le pinceau (D ; P, F, I, Hc) est harmonique.

- **Scolies :** **(1)** le pinceau (I ; B, C, M, ∞) est harmonique

  (2) (IB) ⊥ (DF) , (IC) ⊥ (DPE) , (I∞) ⊥ (DI).

- Les deux pinceaux ayant trois couples de rayons correspondants perpendiculaires, (IM) ⊥ (DHc).

- **Conclusion :** par symétrie de la relation ⊥ , (DHc) est perpendiculaire à (MI).

Scolie : (MI) est la A-droite de Durrande [19] de ABC.

Commentaire : un article concernant la droite (MI) peut être vue sur le site de l'auteur. [20]

---

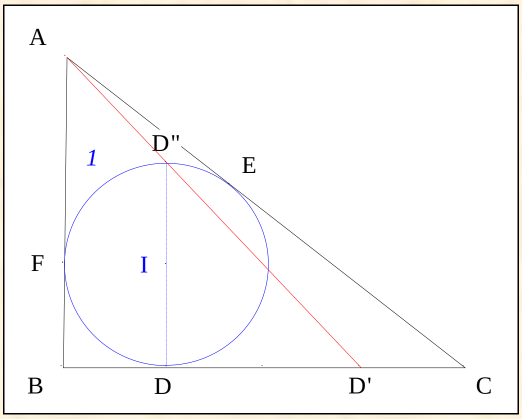
19 Durrande J. B., *Annales* de Gergonne, tome **14** (année 1823-24) 313
20 Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), vol. **7** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ESCALE 5

La A*-droite de Simon L'Huilier*

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
D' l'isotome de D relativement à [BC]
et D" l'antipôle de D relativement à *1*.

Donné : D" est sur (AD'). [21]

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur. [22]

Scolie : D' est le point de contact du A-excercle de ABC.

Note historique : dans le premier tome des *Annale de Gergonne* [23] de 1810-11, Simon L'Huilier introduit la dénomination de "cercle exinscrit" à un triangle dont l'intérêt se développera au début du 19e siècle.

---

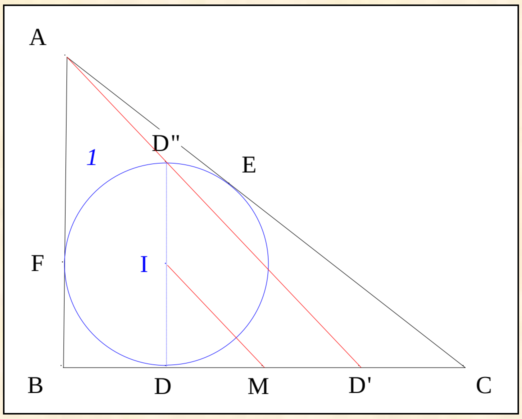
[21] incircle and excircle, AoPS du 31/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=504812
[22] Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), vol. **7**, p. 5-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
[23] *Annales* de Gergonne, tome **1** (année 1812) 156

ESCALE 6

Simon L'Huilier et Jean-Baptiste Durrande

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	le milieu de [BC],
	1	le cercle inscrit de ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	D'	l'isotome de D relativement à [BC]
et	D"	l'antipôle de D relativement à *1*.

Donné : (MI) est parallèle à (AD'D").

Commentaire : une preuve synthétique peut être vue sur le site de l'auteur. [24]

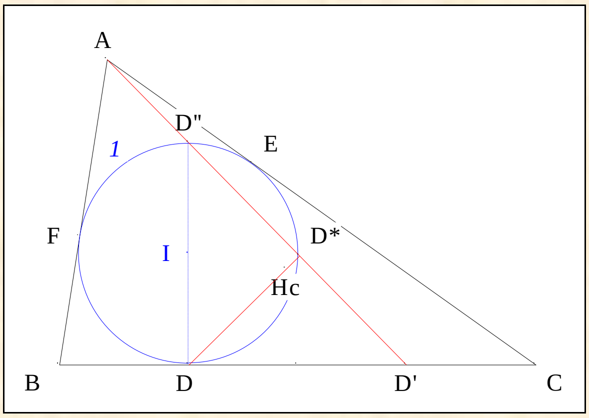
[24] Ayme J.-L., La ponctuelle (MI), vol. **7**, p. 8-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

ESCALE 7

L'orthopoint D*

VISION

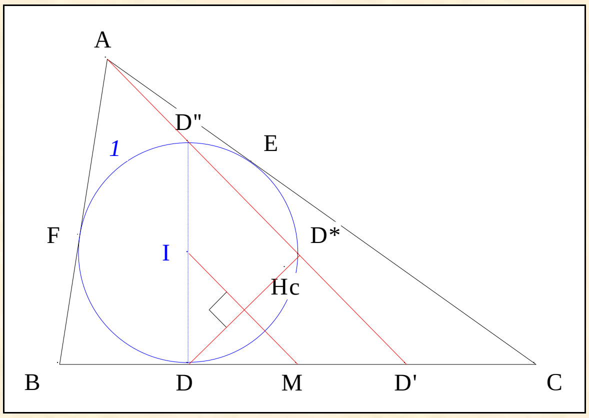
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	D'	l'isotome de D relativement à [BC],
	D"	l'antipôle de D relativement à *1*,
	Hc	l'orthocentre du triangle IAB
et	D*	le second point d'intersection de (AD') avec *1*.

Donné : D* est sur (DHc).

VISUALISATION



- Notons M le milieu de [BC].
- D'après Escale **5,** A, D', D" et D* sont alignés.
- D'après Escale **4,** (DHc) ⊥ (MI).
- D'après Escale **6,** (MI) // (AD*) ;

en conséquence, (DHc) ⊥ (AD*).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (DD*) ⊥ (AD*) ;

en conséquence, (DD*) // (DHc) ;

d'après le postulat d'Euclide, (DD*) = (DHc).

- **Conclusion :** D* est sur (DHc).

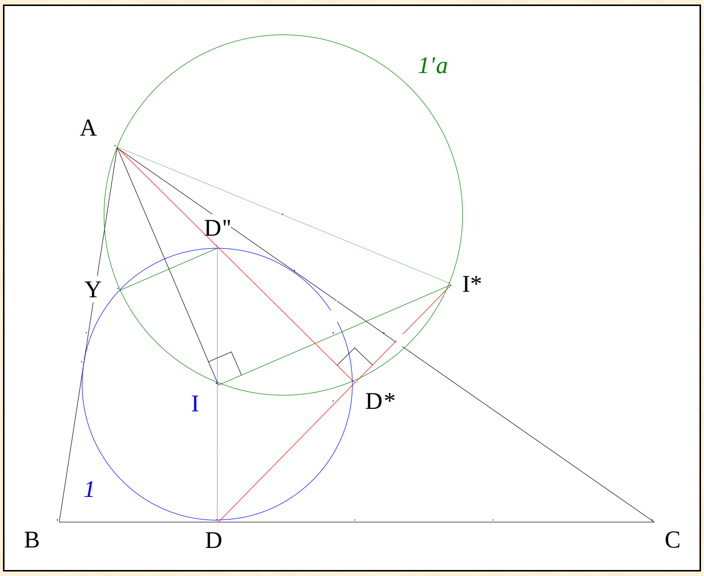
ESCALE 8

Le lemme

"Cercle passant par le centre d'un cercle" [25]

VISION

Figure :

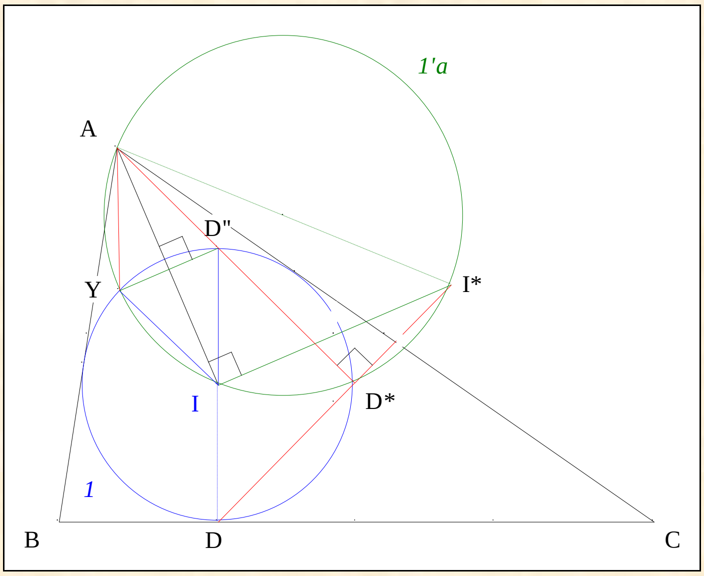


Traits :	ABC	un triangle tel que AB < AC,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	I	le centre de *1*,
	D	le point de contact de *1* avec (BC),
	D"	l'antipôle de D relativement à *1*,
	D*	le second point d'intersection de (AD") avec *1*,
	I*	le point d'intersection de (DD*) et de la perpendiculaire à (AI) en I,
	1'a	le cercle de diamètre [AI*] ; il passe par I et D* ;
et	Y	le second point d'intersection de *1a* et *1*.

Donné : (AI) est la médiatrice de [YD"].

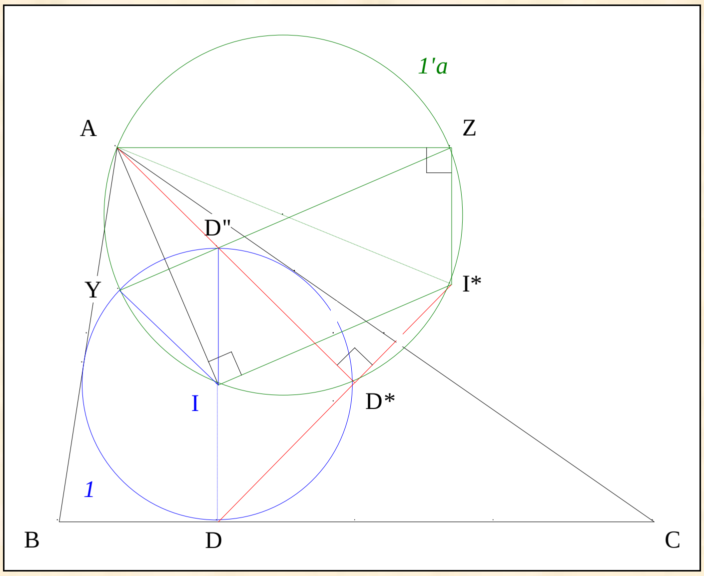
VISUALISATION

[25] Ayme J.-L. Simplicity **1**, G.G.G. vol. **36**, p. 11-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



* Par hypothèse, IY = ID".
* D'après "Cercle passant par le centre d'un cercle" [26], AY = AD".
* **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", (AI) est la médiatrice de [YD"].

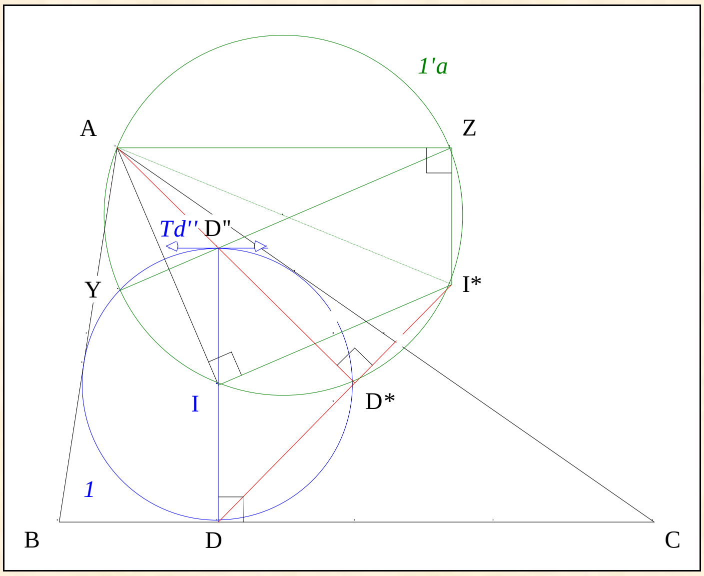
Scolies : **(1)** deux segments égaux



* Notons Z le second point d'intersection de (YD") avec *1'a*.
* Le trapèze IYZI* étant cyclique, I*Z = IY ;
* **Conclusion :** I*Z = ID".

[26] Ayme J.-L. Simplicity **1**, G.G.G. vol. **36**, p. 11-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

(2) Un premier parallélogramme



- Notons *Td''* la tangente à *1* en D''.

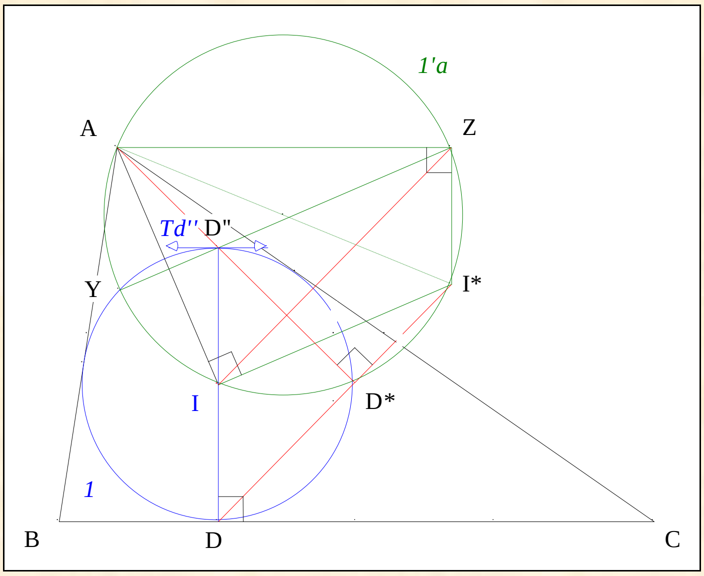
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (I*Z) ⊥ (AZ) ;

- Les cercles *1'a* et *1*, les points de base D* et Y, les moniennes (AD*D'') et (ZYD''), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (AZ) // *Td''* ;
  en conséquence, (I*Z) ⊥ *Td''*.

- Par hypothèse, *Td''* ⊥ (ID'') ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (I*Z) // (ID'').

- **Conclusion :** le quadrilatère I*ZD''I est un parallélogramme.

(2) Un second parallélogramme



- Nous avons : ID = ID'' et D, I, D'' alignés.

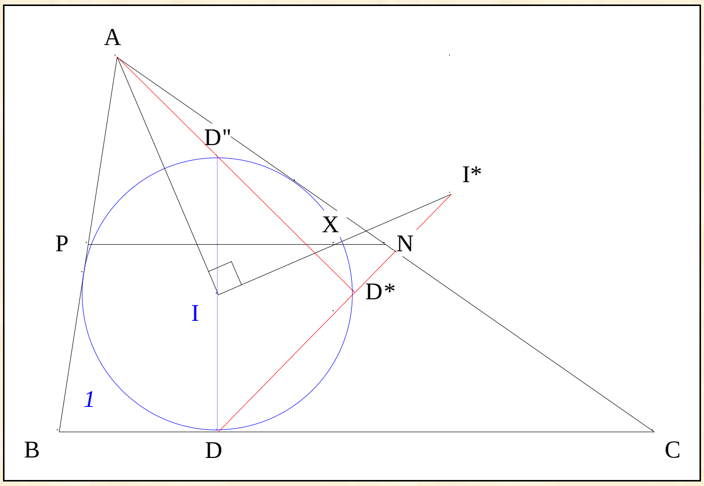
- **Conclusion :** le quadrilatère I*ZID est un parallélogramme.

ESCALE 9

Le point I* *de l'auteur* [27]

VISION

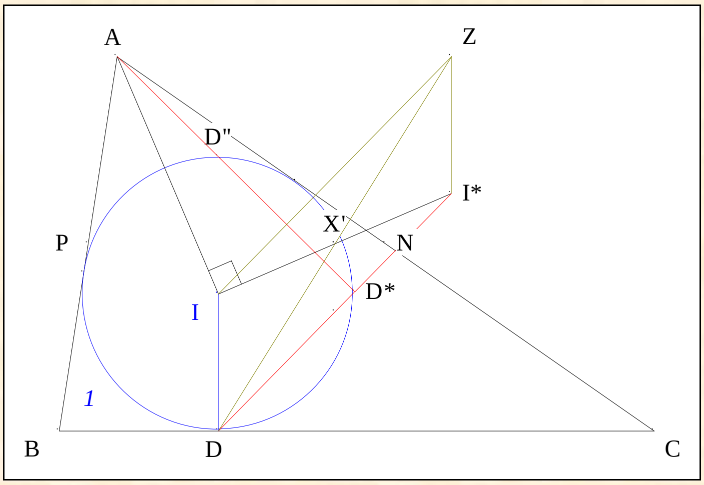
Figure :



Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
N, P les milieux resp. de [AC], [AB],
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
D le point de contact de *1* avec (BC),
D" l'antipôle de D relativement à *1*,
D* le second point d'intersection de (AD") avec *1*,
I* le point d'intersection de (DD*) et de la perpendiculaire à (AI) en I
et X le point d'intersection de (NP) et (II*)

Donné : X est le milieu de [II*].

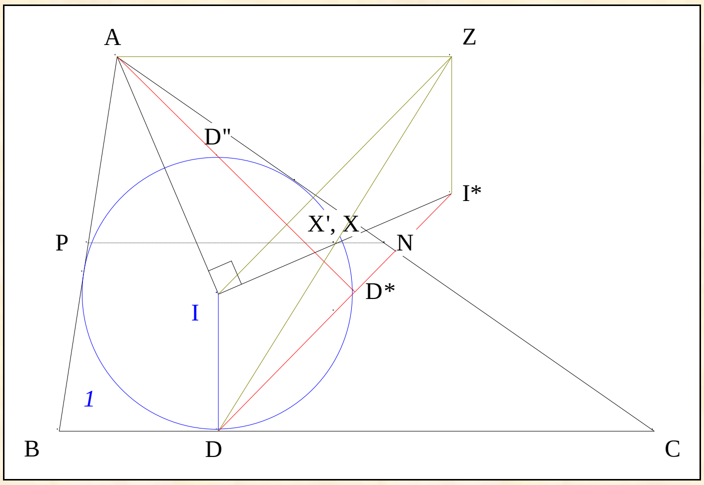
VISUALISATION



[27] Ayme J.-L., Hard or simple, AoPS du 18/04/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1433720_hard_or_simple

- Notons Z le point tel que I*DIZ soit un parallélogramme
  et X' le point d'intersection de (II*) et (DZ).

- **Conclusion partielle :** X' est le milieu resp. de [II*], [DZ].



- D'après Etape **8**, (AZ) est parallèle à (BC).

- (NP) étant l'axe médian de la bande de frontières (AZ) et (BC), X' et X sont confondus.

- **Conclusion :** X est le milieu de [II*].

AUBERGE

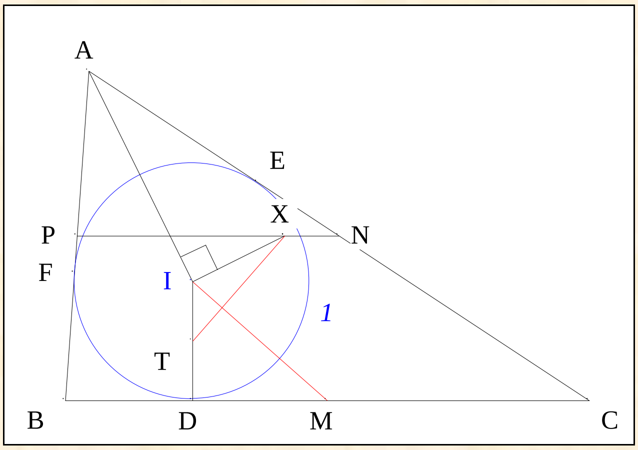
10th Middle European Mathematical Olympiad 2016

Problem **6** [28]

Une retombée

VISION

Figure :

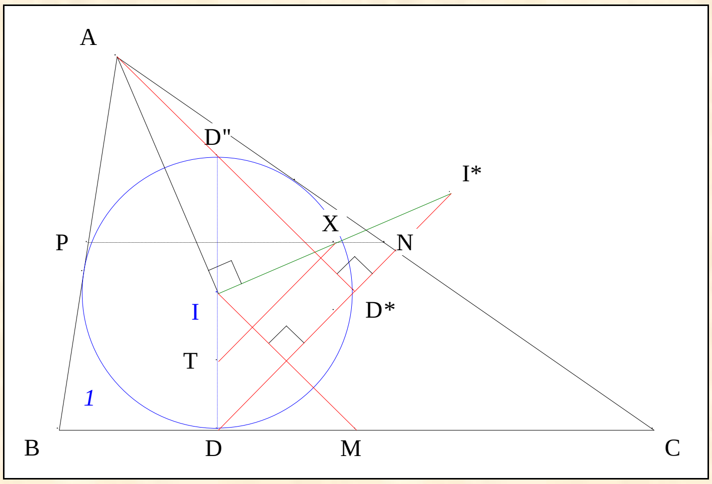


Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
MNP le triangle médian de ABC,
1 le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
D le point de contact de *1* avec (BC),
X le point d'intersection de (NP) et de la perpendiculaire à (AI) en I
et T le milieu de [ID].

Donné : (TX) est perpendiculaire à (IM).

VISUALISATION

[28] MEMO 2016, Vöcklabruck, Austria, on 22 – 28 August 2016
nice geometry, AoPS du 10/04/2017 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1426915_nice_geometry
incenter and midpoints, perpendicularity, AoPS du 25/08/2016 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1295939p6876261



- Notons D" l'antipôle de D relativement à *1*,
  D* le second point d'intersection de (AD") avec *1*
  et I* le point d'intersection de (DD*) et de la perpendiculaire à (AI) en I.

- D'après Etape **9**, X est le milieu de [II*]

- D'après Etape **7**, (DI*) ⊥ (AD*)

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle IDI*, (DI*) // (TX).

- D'après Etape **6**, (AD*) // (IM)

- La relation // étant compatible avec la relation ⊥ , (TX) ⊥ (IM).

- **Conclusion :** (TX) est perpendiculaire à (IM).

Note historique : the Middle European Mathematical Olympiad (MEMO) is an annual mathematical competition that was first held in 2007. It is the successor of Austrian-Polish Mathematical Competition (ÖPMW / APZM), which was held 29 times from 1978 to 2006 as a competition between one Austrian and one Polish team.
Now ten countries participate in the MEMO: Austria, Croatia, Czech Republic, Germany, Hungary, Lithuania, Poland, Slovakia, Slovenia and Switzerland.