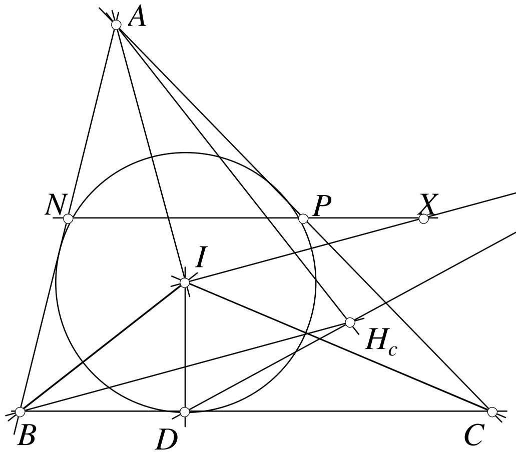
Problema 825 de *triánguloscabri*. *Sean*
ABC un triángulo con circunferencia inscrita (I).
D el punto de contacto de (I) con BC.
N, P los puntos medios de AC, AB.
X el punto de intersección de la perpendicular a AI en I con NP.
H_c el ortocentro del triángulo IAB.
Demostrar que el punto simétrico de I respecto a X pertenece a DH_c

Propuesto por Jean-Louis Aymé.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Usamos coordenadas baricéntricas.



La recta que une los puntos medios $P = (1 : 0 : 1)$ y $N = (1 : 1 : 0)$ es $x - y - z = 0$. La perpendicular por I a AI es paralela a la bisectriz exterior del ángulo A, que a su vez pasa por los puntos $I_b = (a : -b : c)$ e $I_c = (a : b : -c)$ y por tanto tiene ecuación $cy + bz = 0$. Su punto infinito es $\mathscr{I}_a = (c - b : b : -c)$. Entonces la perpendicular por I a AI tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ c-b & b & -c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2bcx - c(s-b)y - b(s-c)z = 0.$$

Estas dos rectas se cortan en el punto

$$X = ((b-c)(a+b+c) : b(a+b-3c) : -c(a-3b+c)) .$$

La suma de las coordenadas de X (peso) es $2(b-c)(a+b+c)$, por lo que considerando

$$I = (2(b-c)a : 2(b-c)b : 2(b-c)c) ,$$

resulta que el simétrico de I respecto de X es

$$J = 2X - I = \left(b^2 - c^2 : b(a-2c) : -(a-2b)c\right) .$$

El ortocentro de AIB es la intersección de las rectas $B\mathscr{I}_a$ y $A\mathscr{I}_b$ siendo $\mathscr{I}_b = (-a : a-c : c)$ el punto del infinito de la bisectriz exterior del ángulo B. Estas rectas tienen ecuaciones $cx-(b-c)z=0$ y $cy-(a-c)z=0$, y se cortan en el punto $H_c=(b-c:a-c:c)$.

Para ver que la recta JH_c pasa por el punto $D=(0:s-c:s-b)$, necesitamos comprobar que se anula el determinante:

$$\begin{vmatrix} b^2-c^2 & b(a-2c) & -(a-2b)c \\ b-c & a-c & c \\ 0 & s-c & s-b \end{vmatrix} = (b-c)\begin{vmatrix} b+c & a(b-c) & -(a-2b)c \\ 1 & a & c \\ 0 & a & s-b \end{vmatrix}$$

$$= a(b-c)\begin{vmatrix} b+c & b-c & -(a-2b)c \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & s-b \end{vmatrix} = a(b-c)\begin{vmatrix} 0 & -2c & -c(a-b+c) \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & s-b \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$