Quincena del 1 al 16 de Mayo de 2017.

Propuesto por Jean Louis Ayme.

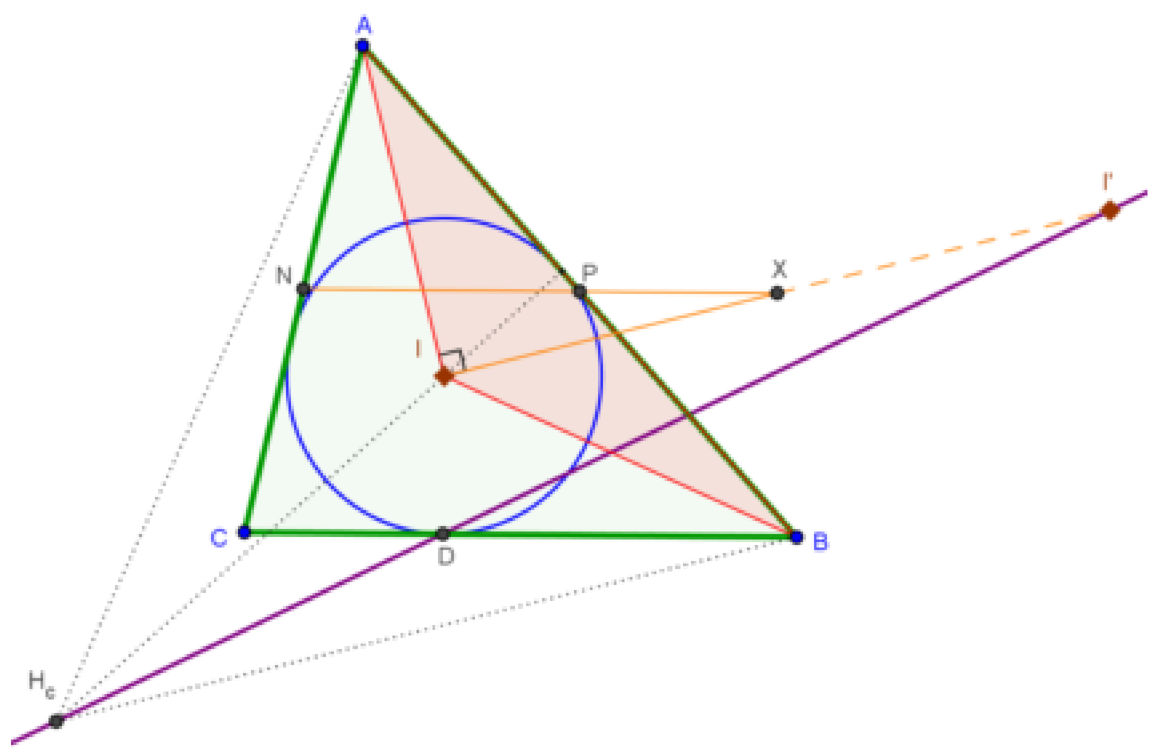
***Problema* 825.-**

1. Sea ABC un triángulo
2. (I) el incírculo of ABC
3. D el punto de contacto de (I) con BC
4. N, P los puntos medios de AC, AB
5. X el punto de intersección de la perpendicular a AI en I con NP
6. H_c el ortocentro del triángulo IAB.

Demostrar: El simétrico de I respecto a X pertenece a DH_c

Aymé, J.L. (2017): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Utilizando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, necesitaremos para resolver este problema las coordenadas de los siguientes puntos y rectas:

$D(0{:}\, s-c{:}\, s-b)$; $P(1{:}1{:}0)$; $N(1{:}0{:}1)$; la recta NP de ecuación $x = y + z$ (paralela media); $U_\infty = (b-c{:}-b{:}\,c)$ punto del infinito de la bisectriz exterior de A, de ecuación $cy + bz = 0$; $V_\infty = (a{:}\,c-a{:}-c)$ punto del infinito de la bisectriz exterior de B, de ecuación $cx + az = 0$. Con estos datos obtenemos para la perpendicular a AI por I (pasa por I y U_∞) la ecuación

$$x - \frac{(s-b)}{b}y - \frac{(s-c)}{c}z = 0.$$

La intersección con NP nos da el punto X de coordenadas

$$X\big(s(b-c){:}\,b(s-2c){:}-c(s-2b)\big).$$

Para hallar el ortocentro del triángulo AIB necesitamos calcular las alturas desde B (pasa por U_∞) y desde A (pasa por V_∞), obteniendo para cada una de ellas las ecuaciones

$$cx + (c-b)z = 0 \qquad \text{y} \qquad cy + (c-a)z = 0.$$

La interseccción de estas rectas es el punto $H_c = (b-c{:}\,a-c{:}\,c)$.

Para concluir necesitamos hallar las coordenadas de $I'(x, y, 1-x-y)$, simétrico de $I\left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}\right)$ por X. Se ha de verificar $I + I' = 2X$. Poniendo las coordenadas se tiene

$$\left(1, \frac{b(s-2c)}{s(b-c)}, \frac{-c(s-2b)}{s(b-c)}\right) = \left(x + \frac{a}{2s}, y + \frac{b}{2s}, (1-x-y) + \frac{c}{2s}\right)$$

de donde se obtiene $I'(b^2-c^2{:}\,b(a-2c){:}-c(a-2b))$.

Se concluye el problema calculando el determinante formado por los puntos D, H_c e I' que es nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & s-c & s-b \\ b-c & a-c & c \\ b^2-c^2 & b(a-2c) & -c(a-2b) \end{vmatrix} = 0$$

∎